EDITORIAL PARANINFO S.A.
Magallanes, 25.—Madrid-15.

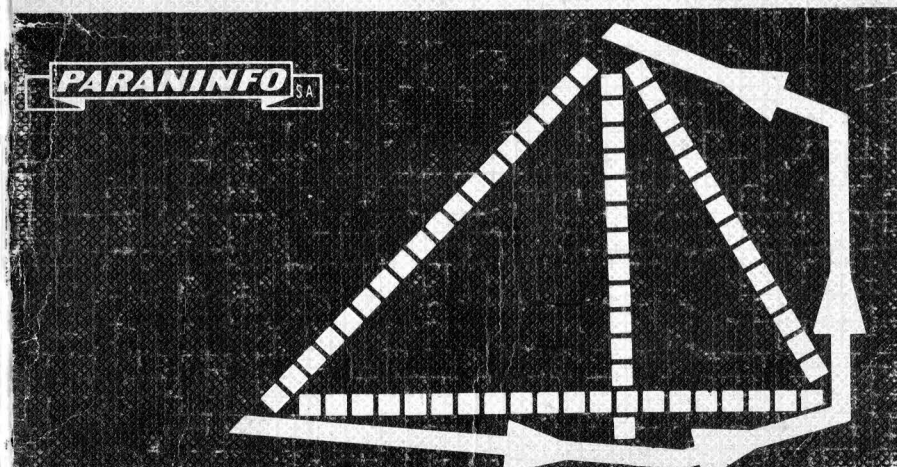
Vectores elementales

E. Œ. WOLSTENHOLME, M.A. Cantab

Vectores elementales

E. Œ. WOLSTENHOLME, M.A. Cantab

PARANINFO S.A.



E. Œ. WOLSTENHOLME, M. A. Cantab
Jefe del Departamento de Matemáticas
del Sheffield City College of Education

VECTORES ELEMENTALES

1981
PARANINFO S.A.
MADRID

Traducido por:
DANIEL GONZALEZ MONTES

© PERGAMON PRESS LTD

© de la edición española, PARANINFO, S.A., Madrid (España)

© de la traducción española, PARANINFO, S.A., Madrid (España)

Título original inglés:
ELEMENTARY VECTORS

Reservados los derechos de edición,
reproducción o adaptación para todos
los países de habla hispana.

IMPRESO EN ESPAÑA
PRINTED IN SPAIN

ISBN: 0-08-021655-2 (edición inglesa)
ISBN: 84-283-1146-3 (edición española)

Depósito Legal: M- 32791- 1981

PARANINFO S.A. Magallanes, 25 - Madrid -15 (3-2890)

INDICE DE MATERIAS

PROLOGO A LA TERCERA EDICION INGLESA . . . . . .

INTRODUCCION 9

CAPITULO I. Definiciones; suma y resta de vectores; multiplicación de un número real por un vector; aplicaciones a problemas estadísticos; vectores de posición; distancia entre dos puntos; cosenos de dirección y razones de dirección; aplicaciones a problemas geométricos 19

CAPITULO II. Producto escalar y vectorial de dos vectores; vector área; productos escalares y vectoriales triples 44

CAPITULO III. Diferenciación e integración de vectores . . . 70

CAPITULO IV. Aplicación del método vectorial a problemas sencillos de cinemática y dinámica relativos al movimiento de una partícula 81

CAPITULO V. Fuerzas centrales y órbitas 96

CAPITULO VI. Ecuación de una recta; ecuación de un plano; problemas geométricos 114

CAPITULO VII. Ecuaciones paramétricas de curvas y superficies curvas 129

SOLUCIONES 140

INDICE ALFABETICO 145

PROLOGO A LA TERCERA EDICION INGLESA

El texto fundamental de esta edición es el mismo que el de la segunda edición, pero se ha añadido una introducción. Esta se dirige principalmente a estudiantes que ya se hayan encontrado con vectores como un concepto de las matemáticas elementales puras y quiere, así se espera, ayudar a cubrir la laguna entre las aplicaciones puramente numéricas y las aplicaciones al mundo de la física, lo que ocupa el cuerpo principal del libro. Estos estudiantes puede que prefieran leer primero la introducción. El S.I. de unidades sustituye en esta edición al C.G.S. y al F.P.S.

El objeto de este libro es, como se dijo en ediciones previas, suministrar un curso introductorio de análisis vectorial que sea a la vez riguroso y elemental, e ilustrar la elegancia del método vectorial en geometría y mecánica, o "filosofía natural".

Mi agradecimiento al Senado de la Universidad de Londres por el permiso para utilizar ejemplos de los artículos de Londres B.Sc., y al Senado de la Universidad de Sheffield por el permiso para usar ejemplos de artículos de B.Sc. y de otros de la Universidad de Sheffield.

Nota para lectores americanos: En los capítulos III, IV y V el término de "integración" puede considerarse como sinónimo de "antidiferenciación".

E.Œ. Wolstenholme

INTRODUCCION

1.

Se da por entendido que los estudiantes están familiarizados con el concepto de números (i) naturales, (ii) enteros, (iii) racionales, (iv) reales. Se supone también que les resulta familiar la idea de definición de un elemento de cualquier conjunto nuevo de números, lo mismo que un par ordenado de elementos de un conjunto definido previamente. Cada conjunto de números tiene su conjunto de reglas y operaciones propias que permiten utilizarlo según el fin para que se inventó. Nosotros podemos decir entonces que hemos inventado un sistema matemático. En el transcurso de nuestra vida diaria utilizamos muchos de estos sistemas. En este libro discutimos sistemas matemáticos que utilizan números distintos de los enumerados anteriormente del (i) al (iv), para intentar objetivos para los que se ha demostrado que estos números son inadecuados.

2. Vectores

Un paso importante para ampliar nuestro sistema numérico es considerar el significado de un par ordenado de números reales. Hemos podido representar números naturales, enteros, racionales y reales por medio de segmentos de una recta elegida arbitrariamente. O bien, elegido un origen O sobre la recta λ, cualquier número se ha podido definir por un punto único P sobre λ, donde la longitud de OP representa al número (ver fig. (i)).

Cuando juzgamos que un par ordenado de números reales, al tra-

Fig. (i)

tar de representarlo en una sola recta, resulta un tanto complicado, y que la representación gráfica tiene como fin simplificar y no complicar un concepto, buscamos una forma simple de representación. Esto lo resolvemos tomando un plano arbitrario Π. Imaginemos que OX, OY es un par de rectas que se cortan en el plano Π, y supongamos que (a, b) es un par ordenado de números reales. Entonces existe un único punto A en OX tal que OA representa a a; igualmente existe un único punto B en OY tal que OB representa a b. Si ahora completamos el paralelogramo $OAQB$, definimos un punto único Q. Podemos así considerar la recta OQ como representante del par ordenado (a, b) de números reales (ver fig. (ii)).

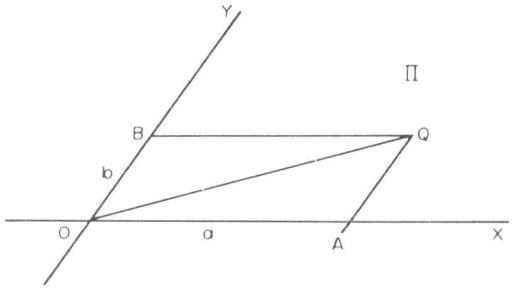


Fig. (ii)

Supongamos igualmente que Ω es un espacio elegido arbitrariamente y que $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ son tres rectas que se cortan, no coplanarias, que representan los números reales a', b', c'. Existe también un punto único Q' tal que $O'Q'$ es la diagonal del paralelepípedo que tiene $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ como aristas concurrentes. $O'Q'$ puede tomarse para representar a (a', b', c') (ver fig. (iii)).

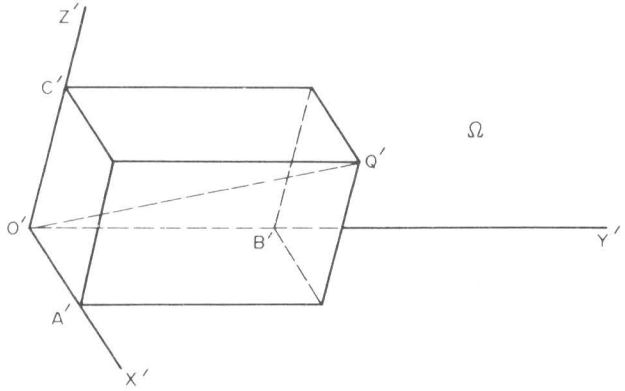


Fig. (iii)

De lo expuesto vemos que el par ordenado de números reales (a, b), está representado por una recta que necesita no sólo una longitud sino también una dirección para definirla en el plano Π. Igualmente, la terna ordenada (a', b', c') está representada por una recta con una longitud y dirección determinadas respecto de los ejes elegidos $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ en el espacio Ω.

Podemos seguir considerando conjuntos ordenados de 4, 5, ..., n números reales, donde n es un número natural. Estos conjuntos ordenados no se pueden representar gráficamente por medio de rectas en el espacio tridimensional de nuestra experiencia, aunque matemáticamente tengan una existencia real como los pares y ternas ordenadas de números reales. Su utilización no se estudiará en este libro, que se limita al estudio de cantidades que se encuentran en el estudio de la filosofía natural. Cualquier número que se define como un conjunto ordenado de números reales se conoce como un *vector*.

3. Notación

En el párrafo 2 hemos expresado un vector solamente en términos de un conjunto de números reales que lo definen. Como esto es un tanto engorroso, representaremos un vector por medio de una sola letra escrita en negrita, mientras que los números naturales, enteros, racionales y reales los representaremos por letras en tipografía normal. Así pues, si (a, b) es un par ordenado de números reales en el párrafo 2, podemos utilizar la letra r para indicar la longitud de la recta OP y $\mathbf{r}$ para el vector (a, b). Es conveniente, cuando se trata de una recta, tener en cuenta que si consideramos solamente el aspecto geométrico, escribiremos OP. Cuando consideremos el aspecto vectorial de la recta, escribiremos $\overline{OP}$. El orden de las letras indica el sentido u orientación del vector; así $\overline{OP}$ indica sentido de O a P. Así pues, el vector (a, b) puede escribirse $(a, b) = \mathbf{r} = \overline{OP}$. También $r = OP$.

Del mismo modo, si q es la longitud de OQ en la fig. (iii), podemos escribir $(a, b, c) = \mathbf{q} = \overline{OQ}$ y $q = OQ$.

Podemos simplificar más aún la notación omitiendo los paréntesis al escribir una n-upla ordenada y en su lugar utilizar símbolos como e_1, e_2, etc., para indicar la posición de cada uno de los elementos en la n-upla de números reales. Así, por ejemplo, podemos escribir

$$(a, b) = ae_1 + be_2$$

y $$(a, b, c) = ae_1 + be_2 + ce_3$$

y en general $$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots a_ne_n,$$

donde n es un número natural y los símbolos e_1, e_2, etc. no tienen significado numérico, sino que sirven solamente para indicar la posición de sus respectivos coeficientes en la n-upla original. Utilizando esta notación, se pueden escribir los términos en cualquier orden, sin ninguna confusión respecto al orden principal. Así, si $\mathbf{u}$ está representado por (5, 2, 3, 7), el vector se puede escribir de la forma siguiente:

$$\mathbf{u} = (5, 2, 3, 7)$$

o $$\mathbf{u} = 5e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 7e_4$$

o $$\mathbf{u} = 2e_2 + 7e_4 + 5e_1 + 3e_3$$

o $$\mathbf{u} = 7e_4 + 3e_3 + 2e_2 + 5e_1$$

o ..., etc.

Como en álgebra elemental, se acostumbra a omitir el coeficiente 1, de forma que (2, 1, 3, 4, 8) se escribiría $2e_1 + e_2 + 3e_3 + 4e_4 + 8e_5$.

Cuando consideramos el conjunto de todas las n-uplas ordenadas, con la notación indicada, al conjunto de símbolos $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ se le llama *base* del conjunto. Supongamos que $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ es el conjunto de vectores

$$\mathbf{i}_1 = (1, 0, \ldots, 0) = e_1$$
$$\mathbf{i}_2 = (0, 1, \ldots, 0) = e_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathbf{i}_n = (0, 0, \ldots, 1) = e_n.$$

Entonces, vemos que la base e_1, e_2, ..., forma un conjunto de *vectores unitarios.* Por consiguiente utilizaremos siempre el conjunto de vectores que formen una base para expresar cualquier vector que nos den. Así, el vector $\mathbf{u}$ dado anteriormente, podría expresarse

$$\mathbf{u} = (5, 2, 3, 7) = 5\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3 + 7\mathbf{i}_4.$$

Los términos $5\mathbf{i}_1$, $2\mathbf{i}_2$, etc., se conocen con el nombre de *componentes* del vector.

4. Ejemplos de notación vectorial

Cualquier cantidad física totalmente definida por una magnitud y una dirección, se puede representar por una recta que es la repre-

sentación gráfica de un par ordenado de números reales o de una terna, puesto que nuestro estudio se limita al plano o al espacio tridimensional. Tal cantidad es una *cantidad vectorial*. Se puede representar gráficamente por una recta y algebraicamente por un par o una terna de números reales.

Ejemplo 1. Supongamos que **r** es el desplazamiento de un cuerpo a una distancia de 5 km sobre el plano, en la dirección $N\theta E$, donde $\theta = \text{sen}^{-1}\ 4/5$. Sea AB la recta para representar a **r** y AX, AY rectas en las direcciones Este y Norte respectivamente. Sean C y D puntos en AX, AY, tales que $ACBD$ sea un rectángulo. Entonces AC representa 4 km, AD representa 3 km y $DAB = ABC = \theta$ (ver fig. (iv)).

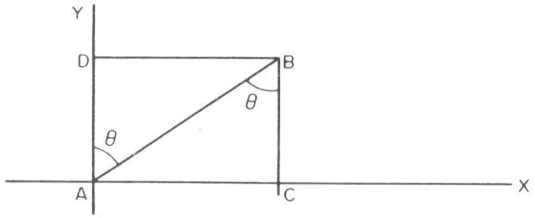


Fig. (iv)

El desplazamiento **r** puede representarse gráficamente por la recta AB y algebraicamente por el par ordenado de números reales (4, 3), o si son vectores unitarios $\mathbf{i}_1$ e $\mathbf{i}_2$, en las direcciones AX, AY respectivamente, podemos escribir

$$\mathbf{r} = 4\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2.$$

Recordando el párrafo 2, vemos que no es esencial elegir direcciones perpendiculares para AX, AY, aunque ordinariamente es conveniente elegirlas, como en el ejemplo, donde la dirección dada está referida a dos rectas perpendiculares.

Ejemplo 2. Supongamos una fuerza **F** de 13 N que actúa en la dirección de la diagonal OC del paralelepípedo rectangular $OPQRABCD$ (ver fig. (v)), en el que las aristas concurrentes OA, OP, OR son de 2, 4, 12 unidades de longitud, respectivamente. Entonces la diagonal OC tiene una longitud de 13 unidades y representa gráficamente la fuerza **F**. Utilizando los ejes OA, OP, OR, se puede representar la fuerza por la terna ordenada (3, 4, 12) ó bien $3\mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 + 12\mathbf{i}_3$. Respecto al origen O, la recta OA representa la terna ordenada (3, 0, 0) o el vector $3\mathbf{i}_1$. Igualmente la recta OP representa la terna ordenada (0, 4, 0) o el vector $4\mathbf{i}_2$, y la recta OR representa a (0, 0, 12) o el vector $12\mathbf{i}_3$, mientras que la recta OC representa a (3, 4, 12) o el vector $3\mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 + 12\mathbf{i}_3$. Considerado geométricamente, el desplazamiento de O a C puede realizarse mediante un desplazamiento de O a A seguido de un desplazamiento de A a B y otro de B a C.

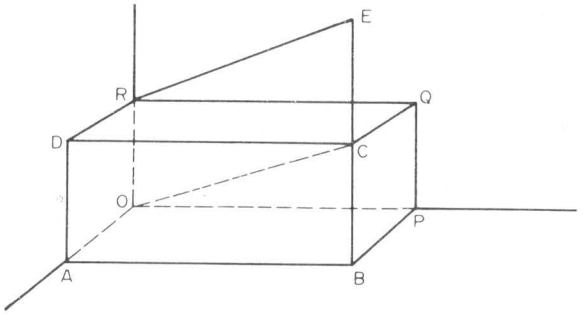


Fig. (v)

Será, pues, conveniente considerar a AB, que es igual y paralela a OP, también como representante del vector $4\mathbf{i}_2$, mientras que BC, que es igual y paralela a OR, se considerará como representante del vector $12\mathbf{i}_3$. En general, cualquier recta igual y paralela a OP se considerará equivalente al vector $4\mathbf{i}_2$. Cualquier recta igual y paralela a OR se considerará equivalente al vector $12\mathbf{i}_3$. Igualmente, cualquier recta igual y paralela a OC será equivalente al vector $3\mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 + 12\mathbf{i}_3$. Supongamos por ejemplo que la recta BC se pro-

longa hasta E, siendo $BC = CE$, entonces RE representará al vector $3\mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 + 12\mathbf{i}_3$. Cuando consideremos conjuntos de rectas iguales y paralelas como vectores equivalentes, emplearemos la notación vectorial: $\overline{OA} = \overline{PB} = \overline{QC} = \overline{RD}$; $\overline{OP} = \overline{RB} = \overline{DC} = \overline{RQ}$; $\overline{OR} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{PQ}$; $\overline{OC} = \overline{RE}$. Como en el ejemplo 1, no es indispensable utilizar ejes perpendiculares entre sí, pero ordinariamente es conveniente hacerlo.

5. Nota histórica

Como otros sistemas matemáticos, el análisis vectorial ha evolucionado gradualmente a lo largo del tiempo. Los sistemas matemáticos que comprenden primeramente los números naturales y sucesivamente los enteros, racionales, reales, se desarrollaron cuando se vio que los sistemas existentes eran inadecuados para los fines que se pretendían. El primer matemático conocido que utilizó los pares ordenados de números fue Cardin, en el siglo XVI, aunque no se consiguió una notación satisfactoria hasta el siglo XIX. Los pares de números reales se utilizaron por primera vez en la solución de las ecuaciones cuadráticas. Se descubrió que aunque se podían hallar dos números reales para satisfacer la ecuación

$$x^2 - 6x + 8 = 0, \tag{1}$$

no podían hallarse tales números para satisfacer la ecuación aparentemente similar

$$x^2 - 6x + 13 = 0. \tag{2}$$

Se descubrió, sin embargo que si x pudiese ser algo distinto de un número real, entonces, los pares ordenados de números (3, 2) y (3, −2) podrían aportar una solución a la ecuación (2) dando unas reglas oportunas de composición de estos nuevos números. A estos números se les dio posteriormente el nombre de "números complejos", conociéndose el primer número del par como "parte real" y el segundo como "parte imaginaria". Los números complejos resultaron tan útiles en el álgebra elemental y en trigonometría, que se incluyó su estudio en la teoría numérica y su representación se hizo usando el símbolo i para indicar la "parte imaginaria" del complejo. Así pues, las soluciones de la ecuación (2) se escriben generalmente $3 + 2i$ y $3 - 2i$.

Al mismo tiempo que se fueron perfeccionando durante el siglo XIX la teoría numérica y el análisis matemático puro, el estudio de la filosofía natural fue atrayendo la atención de los matemáticos, tanto en Europa como en Estados Unidos. Se desarrollaron teorías muy semejantes respecto a las cantidades que requerían magnitud y dirección para definirlas. Los términos de "vector" y "escalar" se introdujeron por entonces, siendo una cantidad vectorial aquélla que resulta totalmente definida cuando se conocen ambas cosas, magnitud y dirección, mientras que una cantidad escalar queda totalmente definida por una magnitud solamente. Como la filosofía natural guarda relación con las cantidades con que nos topamos en el mundo que nos rodea, tales como fuerza, momento, aceleración, etcétera, el sistema matemático, conocido como análisis vectorial, se perfeccionó en el campo de los vectores que podían representarse por rectas en un plano dado (ver párrafo 4, ej. 1) ó en el espacio tridimensional (ver párrafo 4, ej. 2). La notación adoptada en Inglaterra utilizó como base los vectores unitarios perpendiculares $\mathbf{i}, \mathbf{j}$, si se considera un conjunto de vectores en el plano, ó $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, perpendiculares dos a dos, si se considera un conjunto de vectores en el espacio tridimensional. Pero fue en el presente siglo cuando los conceptos de número complejo, vectores, n-uplas ordenadas de números reales, se unificaron bajo el concepto general de "espacio vectorial". La notación $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ para una base, no es de una total generalización, así que aunque los físicos e ingenieros la utilicen, nosotros utilizaremos la notación de sufijos, como ya se ha hecho, con el fin de que el no-especialista considere el análisis vectorial como una parte más de sus estudios de matemáticas. La notación con sufijos se consideró necesaria cuando se empezaron a estudiar las teorías de espacios n-dimensionales y se incrementó tanto el estudio del cálculo tensorial.

6. Operaciones

Como en cada conjunto de números inventado, han tenido que definirse operaciones apropiadas para que dichos conjuntos sirvan para el fin que se inventaron. Este libro trata sólo operaciones con vectores bidimensionales o tridimensionales, con el fin de utilizarlos en contextos del mundo geométrico y físico de fuerza, momento, etc. Aquí, sin embargo, merece la pena destacar algunos aspectos comunes a todos los cálculos vectoriales:

(i) Toda n-upla ordenada de números reales puede multiplicarse por un número real, multiplicando cada elemento por el número real.

Así $$2(4\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2) = 8\mathbf{i}_1 + 6\mathbf{i}_2.$$

(ii) Dos o más vectores pueden sumarse solamente si son de la misma dimensión, es decir, sus n-uplas deben tener el mismo número de elementos. Esto no excluye el hecho de que alguno de los n elementos pueda ser cero.

(iii) Para sumar dos o más vectores, se suman los elementos correspondientes de los mismos. Así, si $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, ..., \mathbf{k}\}$ es el conjunto de n-uplas ordenadas de números reales,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + \ldots + a_n\mathbf{i}_n\\ \mathbf{b} &= b_1\mathbf{i}_1 + b_2\mathbf{i}_2 + \ldots + b_n\mathbf{i}_n\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \mathbf{k} &= k_1\mathbf{i}_1 + k_2\mathbf{i}_2 + \ldots + k_n\mathbf{i}_n\end{aligned}$$

entonces $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \ldots + \mathbf{k} = (a_1 + b_1 + \ldots + k_1)\mathbf{i}_1 + (a_2 + b_2 + \ldots + k_2)\mathbf{i}_2 + \ldots + (a_n + b_n + \ldots + k_n)\mathbf{i}_n$.

(iv) La resta es la operación opuesta a la suma y se puede realizar multiplicando el vector que hay que restar por (-1), realizando a continuación la operación de sumar. Así, si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ están definidos como en (iii)

$$\begin{aligned}\mathbf{a} - \mathbf{b} &= \mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}\\ &= (a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + \ldots) + ((-b_1)\mathbf{i}_1 + (-b_2)\mathbf{i}_2 + \ldots)\\ &= (a_1 - b_1)\mathbf{i}_1 + (a_2 - b_2)\mathbf{i}_2 + \ldots + (a_n - b_n)\mathbf{i}_n.\end{aligned}$$

CAPITULO I

§1.1. Números reales y cantidades escalares

Cualquier cantidad física que pueda representarse totalmente por medio de un número real, se define como *cantidad escalar* o simplemente como *escalar*. Así pues, una cantidad escalar tiene una magnitud, bien en sentido positivo o negativo, pero no una posición definida ni tampoco una dirección. Ejemplos de escalares son: la *masa*, la *energía*, la *potencia*, la *resistencia eléctrica*, el *trabajo*, la *temperatura*, el *tiempo*.

§1.2. Cantidades Vectoriales

Tomemos ahora un espacio Σ en el que un punto O se ha elegido arbitrariamente como origen. Se puede decir entonces que cualquier punto A en Σ determina una *magnitud*, representada por la distancia entre O y A, una *dirección*, representada por la dirección de la recta que pasa por O y A, y un *sentido* u orientación de O a A. Cualquier cantidad que pueda ser representada en su totalidad por dicho par de puntos O y A, se denomina *cantidad vectorial o vector*. De esta forma, si se sabe que un vector tiene una cierta dirección, cierto módulo a, se puede fijar un punto de origen O y a partir de O, puede trazarse una línea OA, con la longitud y sentido dados que representan a a; el vector pues, está perfectamente representado por el *desplazamiento de O a A*.

§1.3. Notación

La cantidad vectorial, representada por el par de puntos O y A, en el párrafo 1.2, se expresa por medio de OA ó **a**. El número a, representado por la distancia OA, es siempre positivo y se denomina *módulo* de la cantidad vectorial. El módulo puede representarse por $|\overline{OA}|$ ó por $|\mathbf{a}|$, ó también OA ó **a**, según la conveniencia en cada caso particular.

Si $\overline{OA}$ representa al vector **a**, entonces AO se dice que representa al vector $-\mathbf{a}$.

§1.4. Nomenclatura

Una cantidad vectorial, tal como se define en el párrafo 1.2, tiene un módulo, una dirección y un sentido, pero no una posición determinada en el espacio, debido a que el punto de origen se eligió arbitrariamente. Tal cantidad vectorial, se denomina *vector libre*. Cuando se utilice el término *vector* deberemos tener en cuenta que nos referimos a un *vector libre*. Si la cantidad vectorial, no obstante, no tiene ni sentido ni módulo determinado, sino que debe situarse en una recta determinada, según la dirección establecida, la cantidad vectorial se denomina *vector lineal*.

Si por el contrario, en lugar de tener un punto de origen O, elegido arbitrariamente, se diera un punto de origen O definido, que tendría que tomarse como auténtico origen, entonces sólo se necesitaría un punto A como extremo de esta cantidad vectorial, la cual se conoce como *vector de posición* o lo que es más preciso, como *vector de posición de A*.

Si **a** y **b** son dos vectores libres, la expresión "el plano de **a**, **b**", quiere indicar cualquier plano en el que se pueden trazar dos líneas, una paralela a **a** y otra paralela a **b**. Existe un número infinito de tal tipo de planos, puesto que, a partir de un punto arbitrario O, se pueden siempre trazar dos líneas OA y OB en la dirección de **a** y **b** repectivamente determinando de esta forma un plano OAB que cumpliría la definición.

§1.5. Equipolencia de dos vectores

Si **a** es un vector y P, R dos puntos en el espacio, entonces se pueden hallar puntos como Q y S de tal forma que $PQ = RS = a$ y el desplazamiento de P a Q esté en la misma dirección de **a**, y el desplazamiento de R a S esté también en la misma dirección de **a**. Se dice entonces que los vectores $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ son vectores *equipolentes*. Esto podría simplificarse así:

$$\overline{PQ} = \overline{RS} = \mathbf{a}.$$

e igualmente

$$\overline{QP} = \overline{SR} = -\mathbf{a}.$$

§1.6. Suma de dos vectores

Partiendo del hecho de que un vector está totalmente representado por un desplazamiento, imaginemos que dos vectores **a**, **b** vienen representados por los desplazamientos $\overline{FG}$ y $\overline{GH}$ respectivamente. Entonces el vector representado por el desplazamiento $\overline{FH}$, que es equivalente al desplazamiento de F a G seguido del desplazamiento de G a H, se define como la suma de los vectores **a** y **b**.

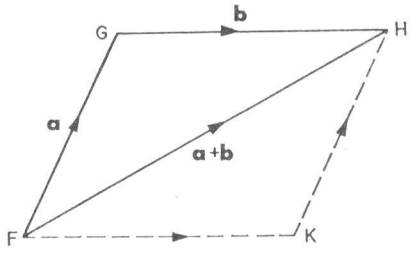


Fig. 1

Esto se expresa escribiendo:

$$\overline{FH} = \overline{FG} + \overline{GH} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Si completamos el paralelogramo $FGHK$, el desplazamiento de F a H es equivalente también, como puede verse, al desplazamiento de F a K seguido por el desplazamiento de K a H,

es decir $\overline{FH} = \overline{FK} + \overline{KH}.$

Pero $\overline{FK} = \overline{GH} = \mathbf{b}$

y $\overline{KH} = \overline{FG} = \mathbf{a},$

de donde $\overline{FH} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$

Así $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, por tanto, la ley conmutativa para la suma en el álgebra escalar también puede aplicarse a la suma en el álgebra vectorial.

§1.7. Diferencia de dos vectores

Supongamos que **a** y **b** son dos vectores y que, con la notación del párrafo 1.6, los puntos F, G, H están tomados de tal forma que $\overline{FG} = \mathbf{a}$, y $\overline{GH} = \mathbf{b}$; supongamos ahora, que HG se prolonga hasta H' de modo que $GH' = HG$. Entonces

$$\overline{H'G} = \overline{GH} = \mathbf{b}$$

$$\overline{GH'} = \overline{HG} = -\mathbf{b}.$$

El desplazamiento de F a G seguido del desplazamiento de G a H' es equivalente al desplazamiento de F a H',

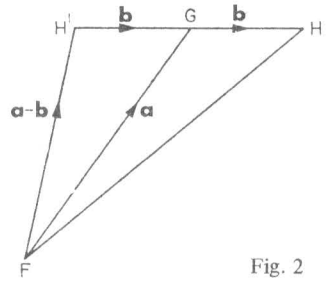


Fig. 2

es decir $\overline{FH'} = \overline{FG} + \overline{GH'},$

es decir $\overline{FH'} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$ (1)

Considerando, como en álgebra escalar, que $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ es equivalente a $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$, se escribirá:

$$\overline{FH'} = \mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

§1.8. Producto de un vector por un número real

Supongamos que **a** es un vector y que n es un número real. El resultado de multiplicar **a** por n se considera que es el vector $n\mathbf{a}$ cuyo módulo es n veces el módulo de **a** y cuya dirección es la misma que la dirección de **a**.

§1.9. Suma de varios vectores

Imaginemos que $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, ..., $\mathbf{a}_n$ es un conjunto de vectores cuya suma se pide. Se puede elegir un punto O arbitrario y después se puede hallar un punto A_1 de tal forma que $\overline{OA_1} = \mathbf{a}_1$, luego un

punto A_2 de tal forma que $\overrightarrow{A_1A_2} = \mathbf{a}_2$, entonces, según la notación del párrafo 1.6,

$$\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2},$$

es decir $$\overrightarrow{OA_2} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2.$$

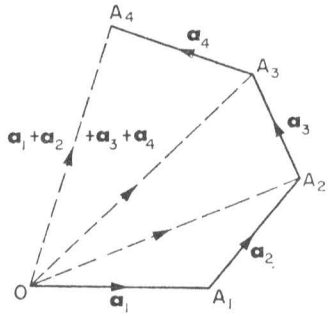


Fig. 3

Se puede hallar ahora un punto A_3 tal que $\overrightarrow{A_2A_3} = \mathbf{a}_3$,

Por tanto $$\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2A_3}$$

es decir $$\overrightarrow{OA_3} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3,$$

y en general

$$\overrightarrow{OA_n} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n.$$

Si alguno de los vectores tuviera que restarse, e.g. $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \ldots$, el problema podría reducirse al proceso de la suma escribiendo la expresión en la forma $\mathbf{a}_1 + (-\mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_3 + \ldots$

$$\mathbf{a}_1 + (-\mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_3 + \ldots$$

§1.10. Teorema

Si **a** *y* **b** *son dos vectores representados por* $\overrightarrow{OA}$ *y* $\overrightarrow{OB}$, *si C es un punto en AB tal que* $AC : CB = \mu : \lambda$, *donde* λ, μ *son números reales, entonces* $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = (\lambda + \mu)\,\mathbf{c}$, *donde* $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$.

Así $$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA},$$

Por tanto $$\lambda\overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{OC} + \lambda\overrightarrow{CA}.$$

Igualmente $$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB},$$

por tanto $$\mu\overrightarrow{OB} = \mu\overrightarrow{OC} + \mu\overrightarrow{CB}.$$

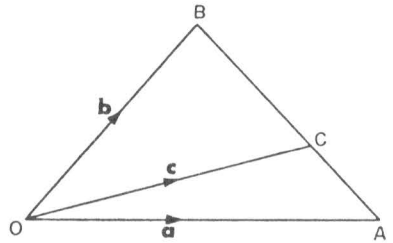


Fig. 4

Por consiguiente $\lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} = (\lambda + \mu)\overrightarrow{OC} + \lambda\overrightarrow{CA} + \mu\overrightarrow{CB}$. (1)

Pero $$AC : CB = \mu : \lambda,$$

i.e. $$\lambda AC = \mu CB.$$

De aquí que $$\lambda\overrightarrow{CA} = -\mu\overrightarrow{CB}$$

i.e. $$\lambda\overrightarrow{CA} + \mu\overrightarrow{CB} = 0.$$

De donde resulta que

$$\lambda\overline{OA} + \mu\overline{OB} = (\lambda + \mu)\overline{OC},$$

es decir $$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = (\lambda + \mu)\mathbf{c}.$$

Ejemplo 1. *Si ABCD es un cuadrilátero en el cual H, K son los puntos medios de BC y AD respectivamente, demostrar que* $\overline{AB} + \overline{DC} = 2\overline{KH}$.

Considerando el cuadrilátero $ABHK$,

$$\overline{AB} = \overline{AK} + \overline{KH} + \overline{HB};$$

considerando el cuadrilátero $DCHK$

$$\overline{DC} = \overline{DK} + \overline{KH} + \overline{HC},$$

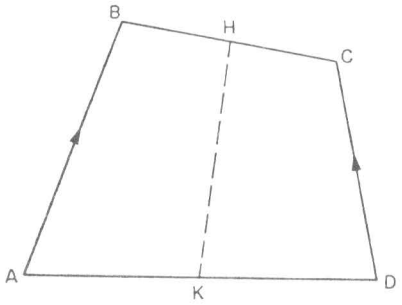


Fig. 5

entonces $\overline{AB} + \overline{DC} = (\overline{AK} + \overline{DK}) + 2\,\overline{KH} + (\overline{HB} + \overline{HC})$.

Pero como H y K son los puntos medios de BC, AD

$$BH = HC, \text{ y } AK = KD.$$

Por tanto $$\overline{HB} = -\overline{HC}, \text{ y } \overline{AK} = -\overline{DK},$$

i.e. $$\overline{HB} + \overline{HC} = 0 \text{ y } \overline{AK} + \overline{DK} = 0,$$

y por consiguiente $$\overline{AB} + \overline{DC} = 2\,\overline{KH}.$$

Ejemplo 2. *ABCD es un cuadrado. Un sistema de fuerzas está completamente representado por las líneas AB, BC, AC, y las direcciones de las fuerzas vienen indicadas por el orden de las letras. Hallar la resultante de estas fuerzas y el lugar donde su línea de acción corta a AB.*

Sean $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ las tres fuerzas dadas, donde $\mathbf{P}_1 = \overline{AB}$, $\mathbf{P}_2 = \overline{BC}$, $\mathbf{P}_3 = \overline{AC}$. Sean L y M los puntos medios de AB y BC respectivamente.

Entonces
$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_3 &= \overline{AB} + \overline{AC} \\ &= 2\,\overline{AM} \\ &= \mathbf{P}_4.\end{aligned}$$

Como las fuerzas $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_3$ actúan ambas a partir de A, entonces su resultante $\mathbf{P}_4$ es una fuerza de magnitud $2AM$ que actúa en la recta AM en dirección de A a M.

Entonces
$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 &= (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_3) + \mathbf{P}_2 \\ &= \mathbf{P}_4 + \mathbf{P}_2 \\ &= 2\,\overline{AM} + 2\,\overline{MC} \\ &= 2\overline{AC} \text{ en magnitud y dirección.}\end{aligned}$$

Como ambas fuerzas $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_4$ pasan por M, su resultante también pasa por M, y su magnitud es $2AC$ que actúa en dirección de L a M, es decir, la resultante de $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, es una fuerza de magnitud $2AC$ que pasa por el punto medio de AB en dirección paralela y con el mismo sentido de $\overline{AC}$.

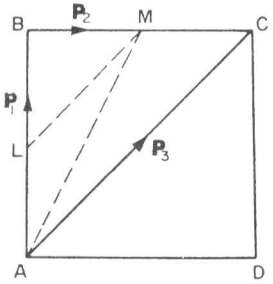


Fig. 6

N.B. *Si AB es una línea recta y n es un número real, se puede decir que una fuerza* **P** *está totalmente representada por nAB si la magnitud de* **P** *es nAB y la línea de acción de* **P** *es AB en dirección* $\overline{AB}$.

Ejemplos Ia

1. F y H son los puntos medios de las diagonales AC y BD del cuadrilátero $ABCD$. Demuestra que

$$\overline{BA} + \overline{BC} + \overline{DA} + \overline{DC} = 4\overline{HF}.$$

2. ABC es un triángulo y O es cualquier punto en el espacio. Prueba que $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OD} + \overline{OE} + \overline{OF}$, donde D, E, y F son puntos medios de BC, CA y AB respectivamente.

3. $VABC$ es un tetraedro y X es el punto medio de BC. Demostrar que $\overline{VA} + \overline{AC} + \overline{VB} = 2\overline{VX}$.

4. $ABCD$ es un cuadrilátero. Demostrar que la resultante de fuerzas representadas por AB, BC, AD y DC en la dirección indicada por el orden de las letras es una fuerza que pasa por el punto medio de BD y está representada por el vector $2\overline{AC}$.

5. ABC es un triángulo y O es un punto arbitrario. Si G es el centro de gravedad del triángulo ABC, demostrar que $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 3\overline{OG}$.

6. A y B son dos puntos fijos en la circunferencia de un círculo y P es un

punto variable en la circunferencia del mismo círculo. Demostrar que si la resultante de dos fuerzas representadas por $2PA$ y $3PB$, cuyas direcciones vienen indicadas por el orden de las letras, está completamente representada por PQ, entonces el lugar geométrico de puntos Q es una circunferencia. Hallar el radio de la misma en función del radio de la circunferencia APB.

7. XY es un diámetro fijo de un círculo y A es un punto arbitrario de la circunferencia. Si $\overline{AX} + \overline{AY} = \overline{AB}$, determinar el lugar geométrico de B cuando A se desplaza sobre el círculo.

8. Si AB y $A'B'$ son dos rectas cualesquiera en el espacio, demostrar que

$$\overline{AA'} + \overline{BB'} = 2\overline{GG'}$$

donde G y G' son los puntos medios de AB y $A'B'$ respectivamente.

9. Si A, B, C, D, E, F, son los vértices de un hexágono regular, demostrar que

$$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE} + \overline{AF} = 3\overline{AD}.$$

10. Si AA', BB', CC', DD', son las aristas paralelas de un paralelepípedo, y AC' es una diagonal, probar que

$$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AA'} + \overline{AB'} + \overline{AC'} + \overline{AD'} = 4\overline{AC'}.$$

11. Fuerzas representadas por $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{DC}$, están actuando sobre A. Desmotrar que su resultante es una fuerza que actúa sobre A y está representada por $2\overline{AC}$.

12. Probar que la resultante de las fuerzas $\lambda\overline{OA}$ y $\mu\overline{OB}$ aplicadas en O es $(\lambda + \mu)\,\overline{OC}$ que también está aplicada en O, siendo C un punto en AB tal que $AC : CB = \mu : \lambda$.

13. Las fuerzas $\lambda\overline{BC}$, $\mu\overline{CA}$ y $\nu\overline{BA}$ actúan en la dirección de los lados del triángulo ABC. La resultante corta a BC y CA en P y Q respectivamente. Demostrar que la resultante es

$$\nu^{-1}(\lambda + \nu)(\mu + \nu)\overline{PQ}.$$

§1.11. Vector unitario

Sea **a** un vector y **e** un vector unitario en la dirección de **a**, es decir, un vector en la dirección de **a** y cuyo módulo es la unidad. Entonces $\mathbf{a} = a\mathbf{e}$.

§1.12. Componentes de un vector

Imaginemos que $\overline{OP}$ representa al vector **P**. Sean *OA*, *OB* y *OC* tres rectas no coplanarias que pasan por *O*. Completa el paralelepípedo *ODEFRSPQ*, que tiene sus aristas *OD*, *OF*, *OR*, sobre *OA*, *OB* y *OC* respectivamente. Entonces:

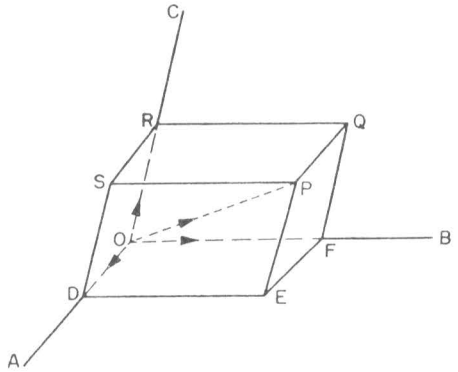


Fig. 7

$$\overline{OP} = \overline{OD} + \overline{DE} + \overline{EP},$$

i.e.
$$\overline{OP} = \overline{OD} + \overline{OF} + \overline{OR}. \qquad (1)$$

Si los vectores representados por $\overline{OD}$, $\overline{OF}$, $\overline{OR}$, son $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$, respectivamente, entonces se puede decir que

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3.$$

$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$, se denominan *vectores componentes* de **P** sobre *OA*, *OB*, *OC*, respectivamente.

Se acostumbra a tomar tres direcciones (ejes) *OA*, *OB*, *OC*, perpendiculares entre sí, que siguen en sentido cíclico la norma del giro

hacia la derecha; es decir que si se colocase un tornillo con su eje en *OA* y girase en sentido positivo de forma que un punto del mismo avanzase de *O* a *A*, una recta fija perpendicular al eje del tornillo, girando un ángulo recto, se trasladaría de la dirección *OB* a la dirección *OC*.

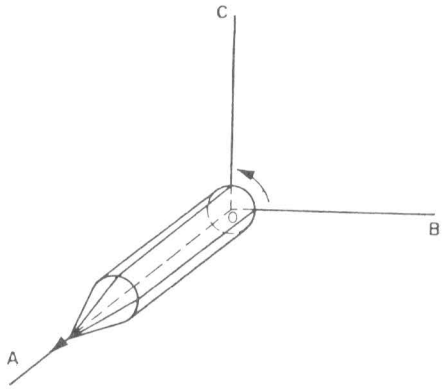


Fig. 8

Del mismo modo si el tornillo se orientase hacia la derecha, de tal forma que su punto se trasladase según *OB*, la línea fija según el eje giraría un ángulo recto desde la dirección *OC* a la dirección *OA*. y si el punto se trasladase según *OC*, la normal al eje giraría un ángulo recto desde la dirección *OA* a la dirección *OB*.

Supongamos que *OX*, *OY* y *OZ* es un sistema dextrógiro de ejes mutuamente perpendiculares, y supongamos también que $\overline{OA}$ representa al vector **a**. Completar el paralelepípedo rectangular *OPQRMNAL* teniendo como aristas *OP*, *OR*, *OM*, sobre *OX*, *OY* y *OZ* respectivamente. Supongamos que $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, son vectores unitarios sobre *OX*, *OY* y *OZ* respectivamente, pensemos también que $OP = a_1$, $OR = a_2$ y $OM = a_3$.

Entonces $\overline{OA} = \overline{OP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$

es decir $\overline{OA} = \overline{OP} + \overline{OR} + \overline{OM}$,

luego $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\,\mathbf{i}_2 + a_3\,\mathbf{i}_3$.

a_1, a_2 y a_3, se denominan *componentes de* **a** en las direcciones *OX*, *OY* y *OZ*, respectivamente.

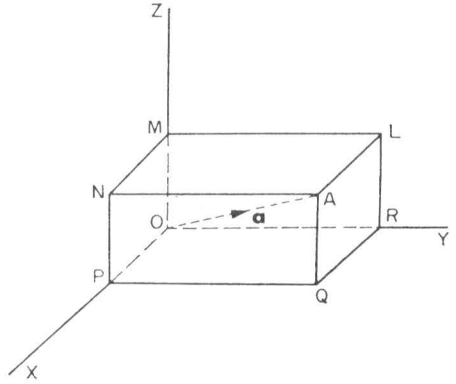


Fig. 9

Deberá tenerse en cuenta de aquí en adelante que, cuando se esté utilizando un sistema fijo dextrógiro de ejes mutuamente perpendiculares *OX*, *OY*, *OZ*; $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ e $\mathbf{i}_3$, representan vectores unitarios en direcciones *OX*, *OY*, *OZ*, respectivamente, y que las componentes de un vector **a** ó **b** ... vendrán representadas por los coeficientes correspondientes, e.g. a_1, a_2, a_3, o por b_1, b_2, b_3 ...

§1.13. Componentes de la suma de dos vectores

Sean $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ representantes de los vectores **a** y **b** respectivamente, siendo

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i}_1 + b_2\mathbf{i}_2 + b_3\mathbf{i}_3.$$

Completar los paralelepípedos rectangulares $OA_1A_2A_3A_4A_5AA_6$ y $AB_1B_2B_3B_4B_5BB_6$.

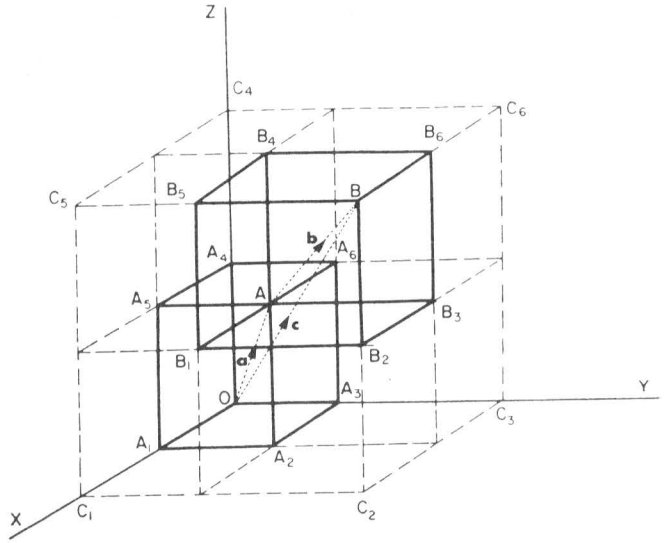


Fig. 10

Por definición $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$

es decir $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overline{OB}$.

Completar el paralelepípedo rectangular $OC_1C_2C_3C_4C_5BC_6$. Entonces (ver fig. 10) las componentes de $\overline{OB}$ son $\overline{OC_1}$, $\overline{OC_3}$ y $\overline{OC_4}$.

Pero $$OC_1 = OA_1 + A_1C_1 = OA_1 + AB_1 = a_1 + b_1,$$
$$OC_3 = OA_3 + A_3C_3 = OA_3 + AB_3 = a_2 + b_2,$$
$$OC_4 = OA_4 + A_4C_4 = OA_4 + AB_4 = a_3 + b_3.$$

Por tanto $\overline{OB} = (a_1 + b_1)\mathbf{i}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{i}_2 + (a_3 + b_3)\mathbf{i}_3,$

Es decir, *las componentes de la suma de dos vectores en cualquier dirección son igual a la suma de las componentes de los dos vectores en la misma dirección.* Se aconseja al estudiante que dibuje su propio diagrama y que construya su propio modelo tri-dimensional para ilustrar este resultado.

§1.14.

Por analogía con el párrafo 1.13, si **a**, **b**, **c** ... es un sistema de vectores de tal forma que

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i}_1 + b_2\mathbf{i}_2 + b_3\mathbf{i}_3$$
$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i}_1 + c_2\mathbf{i}_2 + c_3\mathbf{i}_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

entonces $$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \ldots = (a_1 + b_1 + c_1 + \ldots)\mathbf{i}_1 + (a_2 + b_2 + c_2 + \ldots)\mathbf{i}_2 + (a_3 + b_3 + c_3 + \ldots)\mathbf{i}_3.$$

§1.15. Módulo de un vector en función de sus componentes en tres direcciones mutuamente perpendiculares

Partiendo de la fig. 9, $$OA^2 = OQ^2 + QA^2,$$
$$= OP^2 + PQ^2 + QA^2, \qquad (1)$$

$$OA^2 = OP^2 + OR^2 + OM^2$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

es decir $$a = OA = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}.$$

Igualmente, de la fig. 10:

$$OB^2 = (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2$$

i.e. $$|\,\mathbf{a} + \mathbf{b}\,| = \sqrt{\{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2},$$

y en general

$$|\,\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \ldots\,| = \sqrt{\{(a_1 + b_1 + c_1 + \ldots)^2 + (a_2 + b_2 + c_2 + \ldots)^2 + (a_3 + b_3 + c_3 + \ldots)^2\}}$$

§1.16. Ejes oblicuos

Los resultados de los párrafos 1.12, 1.13 y 1.14, serían verdaderos tanto si los ejes fuesen rectangulares como si no, dado que las únicas propiedades utilizadas son las correspondientes a cualquier paralelepípedo. La notación $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, se reserva exclusivamente para los ejes rectangulares. Los resultados del párrafo 1.15, son válidos *solamente* cuando se utilizan ejes rectangulares, ya que la ecuación (1) del párrafo 1.15, está basada en el teorema de Pitágoras.

§1.17. Cosenos directores y Razones de dirección

Supongamos que el vector representado por $\overline{OA}$ determina los ángulos α_1, α_2, α_3, con los ejes rectangulares *OX*, *OY* y *OZ*, respectivamente y supongamos que a_1, a_2, a_3, son las componentes de a. Completar el paralelepípedo rectangular *OPQRMNAL*.

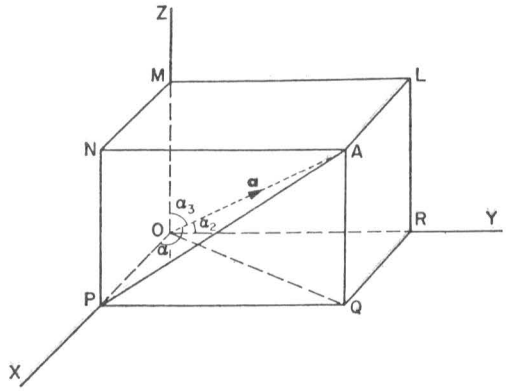


Fig. 11

Según esto, en el triángulo rectángulo *OPA*

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \frac{OP}{OA} = \frac{a_1}{a}; \\ \text{Igualmente} \qquad \cos\alpha_2 &= \frac{OR}{OA} = \frac{a_2}{a}, \\ \text{y} \qquad \cos\alpha_3 &= \frac{OM}{OA} = \frac{a_3}{a}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

Los tres cosenos se conocen como *cosenos directores* de la recta *OA* y son únicos para esta recta.

De las ecuaciones (I)

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

También de las ecuaciones (I)

$$\cos\alpha_1 : \cos\alpha_2 : \cos\alpha_3 = a_1 : a_2 : a_3$$
$$= ka_1 : ka_2 : ka_3,$$

donde k es un número. Si $\lambda_1 = ka_1$, $\lambda_2 = ka_2$, $\lambda_3 = ka_3$ este resultado se puede representar así

$$\cos\alpha_1 : \cos\alpha_2 : \cos\alpha_3 = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3.$$

Un conjunto de razones de la forma $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$, se denomina conjunto de *razones de dirección* de la línea *OA*. Existe un número infinito de tal tipo de conjuntos de razones de dirección y por conveniencia generalmente se elige un conjunto de tal forma que λ_1, λ_2, λ_3, sean los más fáciles de manejar; por ejemplo, números enteros.

De aquí que si $\cos\alpha_1 : \cos\alpha_2 : \cos\alpha_3 = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$,

entonces $$\frac{\cos\alpha_1}{\lambda_1} = \frac{\cos\alpha_2}{\lambda_2} = \frac{\cos\alpha_3}{\lambda_3} = \frac{1}{\sqrt{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}}.$$

Por tanto:
$$\cos\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}},$$
$$\cos\alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}},$$
$$\cos\alpha_3 = \frac{\lambda_3}{\sqrt{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}}.$$

De este modo, si se conoce un conjunto de razones de dirección de una recta, se pueden calcular los cosenos directores.

Según el párrafo 1.13 (ver fig. 10), los cosenos directores de $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ son

$$\frac{a_1 + b_1}{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|}, \quad \frac{a_2 + b_2}{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|}, \quad \frac{a_3 + b_3}{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|},$$

Igualmente los cosenos directores de (a − b) son

$$\frac{a_1 - b_1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|}, \quad \frac{a_2 - b_2}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|}, \quad \frac{a_3 - b_3}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|}.$$

§1.18. Aplicación Geométrica

Supongamos que **a** y **b** son los vectores de posición de dos puntos A y B que parten de un punto de origen fijo O. Entonces

$$\overline{OA} = \mathbf{a} \quad \text{y} \quad \overline{OB} = \mathbf{b}.$$

De donde

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}$$
$$= -\overline{OA} + \overline{OB}$$

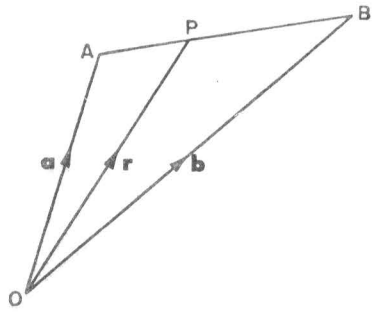


Fig. 12

i.e. $$\overline{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}, \qquad \text{(I)}$$

y $$AB = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$$

i.e. $$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} \qquad \text{(II)}$$

Las razones de dirección de AB son $(b_1 - a_1) : (b_2 - a_2) : (b_3 - a_3)$. Si P es un punto cualquiera de AB de tal forma que $AP : AB = t : 1$, y si **r** es el vector de posición de P, entonces

Si $$AP : AB = t : 1,$$

entonces $$\overline{AP} = t\overline{AB},$$

i.e. $$\mathbf{r} - \mathbf{a} = t(\mathbf{b} - \mathbf{a}),$$

1.e. $$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}). \qquad \text{(III)}$$

que puede considerarse como la ecuación vectorial de AB.

Más aún, supongamos que $AP : PB = \lambda : \mu$, entonces (ver párrafo 1.10)

$$(\lambda + \mu)\mathbf{r} = \mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b},$$

$$\mathbf{r} = \frac{\mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}}{\lambda + \mu}. \qquad \text{(IV)}$$

§1.19. Centro de gravedad de un triángulo

Supongamos que **a**, **b**, **c**, son los vectores de posición de los vértices A, B y C de un triángulo referidos a un origen O. Sea D punto medio de BC y **d** el vector posición de D. Entonces partiendo de la ecuación (IV) del párrafo 1.18

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}.$$

Si G, de vector de posición **g**, es el centro de gravedad del triángulo ABC, entonces G está sobre AD y divide a AD de tal forma que

$$AG : GD = 2 : 1$$

De donde $$\mathbf{g} = \frac{1(\mathbf{a}) + 2(\mathbf{d})}{2 + 1},$$

i.e. $$\mathbf{g} = \tfrac{1}{3}\{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}\}.$$

Ejemplo 3. *Si* **a**, **b** *y* **c** *son los vectores de posición de los vértices A, B y C del paralelogramo ABCD, hallar el vector de posición de D.*

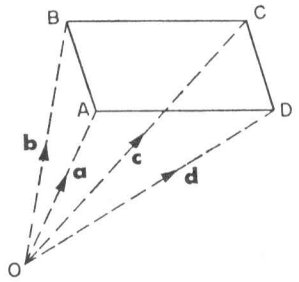


Fig. 13

Como AB y DC son iguales y paralelas, $\overline{DC} = \overline{AB}$.

Entonces, si **d** es el vector de posición de D

$$\mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{a},$$

i.e. $$\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

Ejemplo 4. *Si los vectores de posición de los puntos A y B son* $2\mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 - 5\mathbf{i}_3$ *y* $3\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 7\mathbf{i}_3$, *hallar el módulo y la dirección de* $\overline{AB}$.

Supongamos que **a** y **b** son los vectores de posición de A y B.

Entonces $$\mathbf{a} = 2\mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 - 5\mathbf{i}_3,$$

$$\mathbf{b} = 3\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 7\mathbf{i}_3.$$

Por consiguiente $$\overline{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a},$$

es decir $$\overline{AB} = \mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 + 12\mathbf{i}_3.$$

De donde $$AB^2 = 1 + 4 + 144.$$

Por tanto $$AB = \sqrt{149},$$

y las razones de dirección de AB son $1 : (-2) : 12$.

Ejemplo 5. *Demostrar que los puntos A* $(2, 6, 3)$, *B* $(1, 2, 7)$ *y C* $(3, 10, -1)$ *están alineados.*

Sean **a**, **b**, **c**, respectivamente los vectores de posición de A, B y C.

Entonces $$\mathbf{a} = 2\mathbf{i}_1 + 6\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3,$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 7\mathbf{i}_3,$$

$$\mathbf{c} = 3\mathbf{i}_1 + 10\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3.$$

Así pues $$\overline{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = -\mathbf{i}_1 - 4\mathbf{i}_2 + 4\mathbf{i}_3$$

y $$\overline{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = \mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 - 4\mathbf{i}_3.$$

De aquí se deduce que las razones de dirección de AB y AC son $1 : 4 : (-4)$; las dos rectas AB y AC, tienen un punto común que es A y por consiguiente los puntos A, B y C, están alineados.

Ejemplo 6. *Probar que los puntos cuyos vectores de posición son* $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $4\mathbf{a} - \mathbf{b}$, *y* $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$, *están alineados.*

Sean P, Q y R, los puntos cuyos vectores de posición son $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $4\mathbf{a} - \mathbf{b}$ y $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$, respectivamente. Entonces

$$\overline{PQ} = 3\mathbf{a} - 4\mathbf{b},$$

y $\overline{PR} = 6\mathbf{a} - 8\mathbf{b};$

es decir $\overline{PR} = 2\overline{PQ}.$

De aquí que $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ pasan ambos por el punto P y tienen la misma dirección. Así pues, P, Q, R están alineados.

Ejemplos Ib

1. Si los vectores de posición de dos puntos P y Q son $7\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3$ y $2\mathbf{i}_1 - 5\mathbf{i}_2 + 4\mathbf{i}_3$, respectivamente, hallar la magnitud y dirección del vector $\overline{PQ}$.

2. Si los vectores de posición de los puntos A y B son $4\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 - 7\mathbf{i}_3$ y $12\mathbf{i}_1 + 6\mathbf{i}_2 - 2\mathbf{i}_3$, respectivamente, hallar la magnitud de la dirección del vector $\overline{AB}$.

3. Los vectores de posición de los puntos A, B, C, D, son $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, y $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ respectivamente. Expresar los vectores $\overline{AC}$, $\overline{DB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ en función de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

4. Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, son los vectores de posición de tres vértices A, B, C, del hexágono regular $ABCDEF$, hallar los vectores de posición de los otros tres vectores en función de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

5. Probar que si $ABCD$ es un cuadrilátero cualquiera, las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos se cortan en un punto que es el punto medio de las mismas.

6. Demostrar que si A, B, C, son tres puntos cualesquiera y si G es otro punto de tal forma que $\overline{AG} + \overline{BG} + \overline{CG} = 0$, entonces G es el punto de intersección de las medianas del triángulo ABC.

7. A, B, C, D, son los vértices de un tetraedro y G es un punto tal que $\overline{AG} + \overline{BG} + \overline{CG} + \overline{DG} = 0$. Probar que G se halla sobre la recta que une A con el centro de gravedad del triángulo BCD. Igualmente, sabiendo que se halla sobre las rectas que unen cada uno de los vértices restantes con el centro de gravedad de la cara opuesta, probar que si A', B', C', D', son los centros de gravedad de las caras BCD, CDA, ABD, ABC, respectivamente, las rectas AA', BB', CC', DD', son concurrentes y se dividen unas a otras según la razón 3 : 1.

8. Demostrar que las rectas que unen los puntos medios de las aristas opuestas de un tetraedro son concurrentes y se cortan en el punto medio.

9. Demostrar que los puntos cuyos vectores de posición son $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, están alineados.

10. Demostrar que los puntos cuyos vectores de posición son $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $5\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$, están alineados.

11. Demostrar que los puntos cuyos vectores de posición son $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $5\mathbf{a} + 9\mathbf{b}$, están alineados.

12. Demostrar que los puntos (1, 3, 5), (2, −1, 3), (4, −9, −1), están alineados.

13. Demostrar que los puntos (2, −1, 3), (3, −5, 1), (−1, 11, 9), están alineados.

14. A, B, son dos puntos cuyos vectores de posición de origen O, son $\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3$, $2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3$. C es el punto que divide a AB en la razón 2 : 3; hallar las razones de dirección y la longitud de OC.

15. Demostrar que si O, A, B, C, son cuatro puntos y λ, μ, ν, son tres números reales, tales que $\lambda + \mu + \nu = 0$, entonces si $\lambda\overline{OA} + \mu\overline{OB} + \nu\overline{OC} = 0$, los puntos A, B, C, están alineados.

16. Demostrar que las cuatro diagonales de un paralelepípedo son concurrentes y se cortan en el punto medio. Probar también que las uniones de los puntos medios de las aristas opuestas son concurrentes en el mismo punto y que también se cortan unas a otras en el punto medio.

17. $ABCD$ es un paralelogramo y P es el punto medio de BC. Probar que Q, punto de intersección de AP y BD, es tal que $AQ = 2QP$ y $DQ = 2QB$.

18. A, B, son los puntos cuyos vectores de posición son $\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 - 2\mathbf{i}_3$ y $2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 + 6\mathbf{i}_3$. Fuerzas de 6 N y 21 N actúan a lo largo de OA y OB. Designando la fuerza resultante por $X\mathbf{i}_1 + Y\mathbf{i}_2 + Z\mathbf{i}_3$, hallar el módulo y la dirección de la misma.

19. A, B, C, son los puntos (0, 3, 4), (2, 3, 6), (2, 1, 2). Fuerzas de 15 N, de 14 N y 9 N, actúan a lo largo de OA, OB, OC, respectivamente. Hallar el módulo y dirección de su resultante.

20. O es el vértice de un cubo y fuerzas de 2 N, 4 N, 3 N, actúan a lo largo de las diagonales OA, OB, OC, de las tres caras del cubo que contiene O. Hallar la resultante de estas fuerzas.

21. $OABCDEFG$ es un cubo en el cual OA, OC, OD, son tres aristas perpendiculares entre sí y DE es paralela a OA. Fuerzas de 1 N, 2 N, 3 N y 4 N, actúan en O segun las direcciones de los vectores $\overline{DA}$, $\overline{AC}$, $\overline{OF}$ y $\overline{DF}$ respectivamente. Hallar el módulo y la dirección de la resultante de estas fuerzas.

CAPITULO II

§2.1.

En el desarrollo del álgebra elemental, como el concepto de número se ha extendido hasta incluir no sólo los enteros positivos sino también los fraccionarios, reales y complejos, también las operaciones de suma y producto de dos números se han vuelto a definir en cada caso con el fin de dar a las operaciones propiedades que puedan aplicarse a los nuevos miembros de la familia de números, no dando lugar a dificultades con las operaciones anteriores. La resta y división mantienen en cada caso la propiedad de procesos inversos y no requieren por tanto un estudio aparte. Así en álgebra elemental, si d es el resultado de restar b de a, o sea

$$d = a - b = a + (-b)$$

entonces

$$d + b = a$$

así pues, d es el número que sumado a b nos da el número a.

Del mismo modo, si q es el resultado de dividir a por b, de modo que

$$q = \frac{a}{b}$$

entonces

$$qb = a$$

así, q es el número que multiplicado por b nos da el número a.

§2.2.

Al definir las operaciones de suma y multiplicación en álgebra elemental, dos leyes han permanecido inalterables, la *ley conmutativa* y *la ley asociativa.* Así pues para dos números cualesquiera, reales o complejos, a, b,

$$a + b = b + a,$$

y

$$ab = ba,$$

también para tres o más números $a, b, c,$

$$a + b + c = a + (b + c) = b + (c + a) = c + (a + b),$$

y

$$abc = a(bc) = b(ca) = c(ab).$$

La operación de multiplicar cumple también la ley distributiva, de tal modo que

$$a(b + c) = ab + ac.$$

En las operaciones de resta y división no se cumple la ley conmutativa ni la asociativa, sino que las operaciones de este tipo están totalmente definidas, tal como se especifica en el párrafo 2.1, por las características de ser operaciones inversas, y de aquí se deriva que, si las operaciones de suma y multiplicación pueden realizarse, también los resultados de la resta y de la división pueden siempre hallarse.

§2.3.

Es conveniente examinar a este nivel la medida en que la definición de suma dada en álgebra vectorial se adapta a la definición de suma dada en álgebra real y compleja.

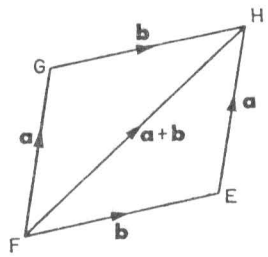


Fig. 14

Si en la figura 2 del párrafo 1.7, el paralelogramo *EFGH* está determinado (ver fig. 14), entonces, por definición

$$\overline{FG} + \overline{GH} = \overline{FH} = \overline{FE} + \overline{EH}$$
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overline{FH} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

Así pues, la suma de **a** y **b** cumple la ley conmutativa (ver también 1.6). Consideremos ahora la suma de tres vectores **a**, **b**, **c**, en la que $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, representan **a**, **b**, **c**, respectivamente (ver fig. 15).

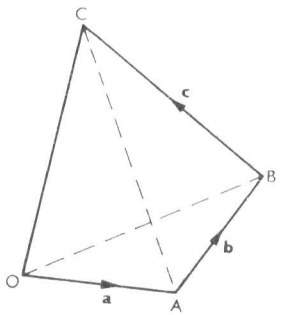


Fig. 15

Entonces $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$,

y $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \overline{OB} + \overline{BC} = \overline{OC}$.

También $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$,

y $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OC}$.

De donde $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

y partiendo del hecho de que la suma de dos vectores es conmutativa,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= (\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \mathbf{a} \\ &= \mathbf{b} + (\mathbf{c} + \mathbf{a}) \\ &= (\mathbf{c} + \mathbf{a}) + \mathbf{b}.\end{aligned}$$

De donde $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = (\mathbf{c} + \mathbf{a}) + \mathbf{b}$,

es decir, la ley asociativa se aplica para la suma de tres vectores. Este argumento se puede aplicar a la suma de cuatro o más vectores.

§2.4.

Todavía queda por discutir si un desarrollo posterior de álgebra vectorial precisa de una operación de alguna forma análoga a la operación de multiplicación, como la que se utiliza en el álgebra real y compleja. El examen de mecanismos elementales nos proporciona dos ejemplos en los cuales las cantidades vectoriales se combinan de tal forma que el resultado es proporcional al producto aritmético de sus módulos, mas como el resultado en uno de los casos es escalar y en otro es vectorial se sugiere la idea de dos formas de producto, una de producto escalar y otra de producto vectorial.

§2.5. Producto Escalar de dos vectores

Consideremos el trabajo realizado por una fuerza **F** mientras su punto de aplicación se desplaza desde el punto A al punto B. Si $\overline{AB}$ = s, el trabajo realizado es la cantidad escalar $(s \cos \theta) F$ donde

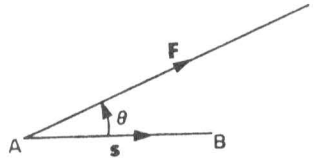


Fig. 16

θ es un ángulo formado por la dirección de **F** con la dirección de **s**. Esto sugiere que el resultado escalar de multiplicar **a** por **b** debería ser $ab \cos \theta$, donde θ es el ángulo formado por la dirección de **b** con la dirección de **a**.

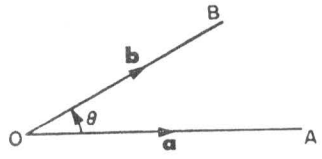


Fig. 17

Si se toma esta definición, entonces el resultado escalar de multiplicar **b** por **a** debería ser $ba \cos (-\theta)$. Pero $ba = ab$ y $\cos (-\theta) = \cos \theta$. De aquí se deriva que el resultado del producto escalar de **a** por **b** es el mismo resultado de multiplicar **b** por **a** escalarmente. Esta forma de producto de **a** y **b** se conoce como *producto escalar* de **a** y **b**, que se escribe **a** . **b**, y que se lee "a punto b" ó "producto escalar de **a** por **b**". Se ha demostrado que **a** . **b** = **b** . **a**. De aquí que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}.$$

Así pues el producto escalar de dos vectores es conmutativo.

Adoptando esta definición de producto escalar, el trabajo realizado por la fuerza **F**, cuando el desplazamiento de su punto de aplicación es **s**, es **s** . **F**.

§2.6. Producto vectorial de dos vectores

Supongamos que A es el punto cuyo vector de posición con respecto a un punto de origen O es **s** y supongamos que **F** es una fuerza que actúa sobre A en la dirección AB. Entonces los puntos O, A, B definen un plano.

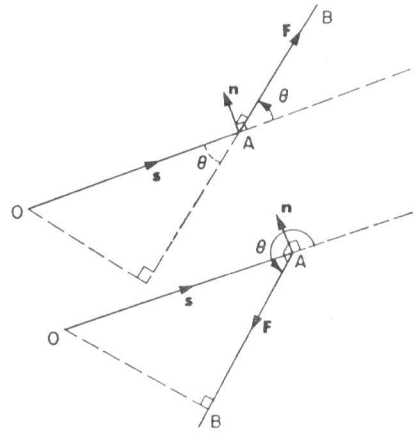


Fig. 18

Sea θ el ángulo que $\overline{AB}$ forma con $\overline{OA}$, y partamos de que **n** es el vector unitario normal al plano de O, A, B de tal forma que **s**, **F**, **n** formen un sistema de vectores perpendiculares (ver 1.12). El mo-

momento de **F** con relación a O es de magnitud (s sen θ) F; i.e. sF sen θ; se considera este momento positivo si el efecto de un giro está en la dirección en la que θ se incrementa. Es decir si $0 < \theta < \pi$.

El momento de **F** con relación a O se considera negativo si el efecto de su giro se da en una dirección en la que θ disminuye. Es decir si $\pi < \theta < 2\pi$. Así, el vector (sF sen θ) **n** tiene la magnitud del momento de **F** en relación con O. Además el vector (sF sen θ) **n** es positivo porque $0 < \theta < \pi$ y negativo porque $\pi < \theta < 2\pi$ y de este modo tiene el mismo *signo* del momento de **F** con relación a O. Es conveniente decir, por consiguiente, que el momento de **F** respecto a O es el vector (sF sen θ) **n**, perpendicular a esa línea, según un sentido determinado por la regla de enroscamiento hacia la derecha. Esto sugiere que el resultado vectorial de multiplicar el vector **a** por el vector **b** debería ser el vector (ab sen θ) **n** donde **a**, **b**, **n**, forman un sistema dextrógiro de vectores y θ es el ángulo formado por la dirección de **a** y la dirección de **b**.

Esta forma del producto **a** y **b**, se conoce como producto vectorial de **a** y **b**, y se escribe **a** $\times$ **b**. La expresión **a** $\times$ **b** se lee "producto vectorial de **a** y **b**". Si se toma esta definición de producto vectorial, el producto vectorial de **b** $\times$ **a** deberá ser igual a

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (ab \sin \theta)\mathbf{n} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

Y así pues el producto vectorial de dos vectores no es conmutativo.

Tomando esta definición de producto vectorial, el momento de la fuerza F con relación al punto de origen es **s** $\times$ **F**, donde **s** es el vector de posición del punto de aplicación de **F**.

§2.7. Ley Distributiva - Producto Escalar

(i) Por definición, si θ es el ángulo entre los vectores **a** y **b**,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= ab \cos \theta \\ &= a(b \cos \theta) \end{aligned}$$

Igualmente, si ϕ es el ángulo entre los vectores **a** y **c**,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} &= ac \cos \phi \\ &= a(c \cos \phi) \end{aligned}$$

por tanto $$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} &= a(b \cos \theta) + a(c \cos \phi) \\ &= a(b \cos \theta + c \cos \phi) \end{aligned}$$

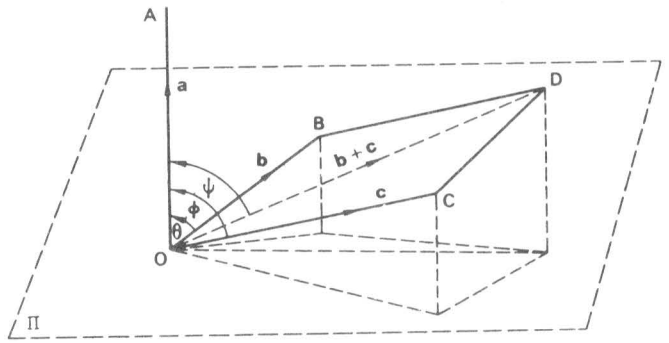


Fig. 19

Si **r** es la suma de **b** y **c** que forman un ángulo ψ con **a**, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} &= ar \cos \psi \\ &= a(r \cos \psi) \end{aligned}$$

Pero $$\mathbf{r} = \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

de aquí que, según el párrafo 1.13, en la dirección de **a**,

$$r \cos \psi = b \cos \theta + c \cos \phi$$

por tanto
$$\begin{aligned}\mathbf{a}\,.\,\mathbf{r} &= a(r\cos\psi)\\ &= a(b\cos\theta + c\cos\phi)\\ &= \mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} + \mathbf{a}\,.\,\mathbf{c},\\ \mathbf{a}\,.\,(\mathbf{b}+\mathbf{c}) &= \mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} + \mathbf{a}\,.\,\mathbf{c}.\end{aligned}$$

Este argumento se puede aplicar a cualquier número de vectores, de modo que

$$\mathbf{a}\,.\,(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+\ldots) = \mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} + \mathbf{a}\,.\,\mathbf{c} + \mathbf{a}\,.\,\mathbf{d} + \ldots$$

Y así, se cumple la ley distributiva en la multiplicación escalar de vectores.

(ii) El resultado del párrafo 2.7 (i) se puede aplicar a un producto de la forma

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\ldots)\,.\,(\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}+\ldots).$$

Puesto que, si $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\ldots = \mathbf{A}$, entonces

$$\begin{aligned}&(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\ldots)\,.\,(\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}+\ldots)\\ &\quad= \mathbf{A}\,.\,(\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}+\ldots)\\ &\quad= \mathbf{A}\,.\,\mathbf{p} + \mathbf{A}\,.\,\mathbf{q} + \mathbf{A}\,.\,\mathbf{r} + \ldots\end{aligned}$$

Pero
$$\begin{aligned}\mathbf{A}\,.\,\mathbf{p} &= \mathbf{p}\,.\,\mathbf{A}\\ &= \mathbf{p}\,.\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\ldots)\\ &= \mathbf{p}\,.\,\mathbf{a} + \mathbf{p}\,.\,\mathbf{b} + \mathbf{p}\,.\,\mathbf{c} + \ldots\\ &= \mathbf{a}\,.\,\mathbf{p} + \mathbf{b}\,.\,\mathbf{p} + \mathbf{c}\,.\,\mathbf{p} + \ldots\end{aligned}$$

Igualmente $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{q} = \mathbf{a}\,.\,\mathbf{q} + \mathbf{b}\,.\,\mathbf{q} + \mathbf{c}\,.\,\mathbf{q} + \ldots$, etc.

De donde

$$\begin{aligned}&(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\ldots)\,.\,(\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}+\ldots)\\ &\quad= \mathbf{a}\,.\,\mathbf{p} + \mathbf{b}\,.\,\mathbf{p} + \mathbf{c}\,.\,\mathbf{p} + \ldots\\ &\qquad+ \mathbf{a}\,.\,\mathbf{q} + \mathbf{b}\,.\,\mathbf{q} + \mathbf{c}\,.\,\mathbf{q} + \ldots\\ &\qquad+ \mathbf{a}\,.\,\mathbf{r} + \ldots\end{aligned}$$

etc.

§2.8.

Por definición, el vector **b** forma un ángulo θ con el vector **a**, y n es un número real

$$n(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}) = nab\cos\theta$$

también
$$(n\mathbf{a})\,.\,\mathbf{b} = nab\cos\theta$$

y
$$\mathbf{a}\,.\,(n\mathbf{b}) = nab\cos\theta.$$

De donde $n(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}) = (n\mathbf{a})\,.\,\mathbf{b} = \mathbf{a}\,.\,(n\mathbf{b}) = nab\cos\theta.$

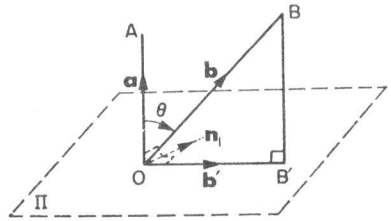
§2.9. Ley Distributiva - Producto Vectorial

(i) Supongamos que los vectores **a** y **b** están representados por $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, supongamos que Π es el plano que pasa por O y es perpendicular a OA. Sea BB' una perpendicular desde B a Π y $\mathbf{b}'$ el vector representado por $\overline{OB}'$. Entonces si **b** forma un ángulo θ con **a**,

$$b' = b\ \text{sen}\ \theta$$

Supongamos que $\mathbf{n}_1$ es el vector unitario perpendicular a **a**, **b**, de tal modo que **a**, **b**, $\mathbf{n}_1$ formen un sistema dextrógiro, entonces

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (ab\sin\theta)\mathbf{n}_1.$$



También
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}' = \left(ab' \sin \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{n}_1$$
$$= (ab')\mathbf{n}_1$$
$$= (ab \sin \theta)\mathbf{n}_1.$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}' = ab'\mathbf{n}_1. \qquad (1)$$

Supongamos que c es un tercer vector representado por $\overline{OC}$. Tracemos CC', perpendicular a Π y sea $\mathbf{c}'$ el vector representado por $\overline{OC'}$. Completamos el paralogramo $OBDC$ y trazamos DD' perpendicular a Π (ver fig. 21). Como OC, BD son iguales y tienen la misma inclinación respecto a Π, entonces OC' y $B'D'$ son iguales. OB' y $C'D'$ son iguales. De aquí que $OB'D'C'$ sea un paralelogramo. Sean $\mathbf{c}'$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{d}'$ los vectores representados por $\overline{OC'}$, $\overline{OD}$, $\overline{OD'}$ respectivamente. Como $OBDC$, y $OB'D'C'$ son paralelogramos

$$\mathbf{d} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \quad \text{y} \quad \mathbf{d}' = \mathbf{b}' + \mathbf{c}'$$

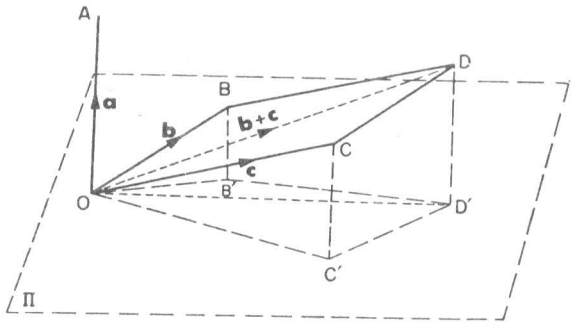


Fig. 21

Utilizando el resultado de arriba

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}' = ab'\mathbf{n}_1,$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}' = ac'\mathbf{n}_2,$$
y
$$\mathbf{a} \times \mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{d}' = ad'\mathbf{n}_3,$$

donde $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$, son tres vectores unitarios en el plano Π perpendiculares a OB', OC', OD' respectivamente. Líneas OB'', OC'', OD'' pueden trazarse en Π perpendiculares a OB', OC', OD' respectivamente, de tal forma que $\overline{OB''} = ab'\mathbf{n}_1$, $\overline{OC''} = ac'\mathbf{n}_2$, $\overline{OD''} = ad'\mathbf{n}_3$. Dado que los lados del cuadrilátero $OB''D''C''$ son proporcionales a los lados del paralelogramo $OB'D'C'$ y los ángulos del cuadrilátero $OB''D''C''$ son iguales a los ángulos del paralelogramo $OB'D'C'$, entonces el cuadrilátero $OB''D''C''$ es también un paralelogramo y entonces

$$\overline{OD''} = \overline{OB''} + \overline{OC''},$$
$$ad'\mathbf{n}_3 = ab'\mathbf{n}_1 + ac'\mathbf{n}_2$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c},$$
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

Como en el caso del producto escalar, se puede aplicar este razonamiento a cualquier número de vectores de tal forma que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{e} + \ldots) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{a} \times \mathbf{e} + \ldots$$

Y de aquí se deduce que el producto vectorial de vectores es distributivo.

(ii) El resultado del párrafo 2.9 (i) puede aplicarse a un producto de la forma

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \ldots) \times (\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r} + \ldots).$$

Suponiendo que $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \ldots = \mathbf{A}$, entonces
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \ldots) \times (\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r} + \ldots)$$
$$= \mathbf{A} \times (\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r} + \ldots)$$
$$= \mathbf{A} \times \mathbf{p} + \mathbf{A} \times \mathbf{q} + \mathbf{A} \times \mathbf{r} + \ldots.$$

Ahora $\mathbf{A} \times \mathbf{p} = -\mathbf{p} \times \mathbf{A}$

$= -\mathbf{p} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \dots)$

$= -\mathbf{p} \times \mathbf{a} - \mathbf{p} \times \mathbf{b} - \mathbf{p} \times \mathbf{c} - \dots$

$= \mathbf{a} \times \mathbf{p} + \mathbf{b} \times \mathbf{p} + \mathbf{c} \times \mathbf{p} + \dots .$

Igualmente,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{q} = \mathbf{a} \times \mathbf{q} + \mathbf{b} \times \mathbf{q} + \mathbf{c} \times \mathbf{q} + \dots \text{ etc.}$$

De donde

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \dots) \times (\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r} + \dots) \\ = \mathbf{a} \times \mathbf{p} + \mathbf{b} \times \mathbf{p} + \mathbf{c} \times \mathbf{p} + \dots \\ + \mathbf{a} \times \mathbf{q} + \mathbf{b} \times \mathbf{q} + \mathbf{c} \times \mathbf{q} + \dots \\ + \mathbf{a} \times \mathbf{r} + \mathbf{b} \times \mathbf{r} + \dots \\ + \dots\end{aligned}$$

§2.10.

Si el vector **b** forma un ángulo θ con el vector **a** y m es un número real y **n** es el vector unitario perpendicular a **a** y **b** de modo que **a**, **b**, **n** formen un sistema dextrógiro, entonces por definición

$$m(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (mab \sin \theta)\mathbf{n}.$$

También $(m\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = (mab \sin \theta)\mathbf{n},$

y $\mathbf{a} \times (m\mathbf{b}) = (mab \sin \theta)\mathbf{n}.$

De donde $m(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = m\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times m\mathbf{b} = (mab \sin \theta)\mathbf{n}.$

§2.11.

Con la notacción de costumbre, si $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ son vectores unitarios en las direcciones del sistema dextrógiro y con ejes *OX*, *OY*,

OZ perpendiculares entre sí, de las definiciones de los párrafos 2.5 y 2.6 se deduce que

$$\mathbf{i}_1 . \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 . \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 . \mathbf{i}_3 = 1 \qquad \text{(I)}$$

y $\mathbf{i}_1 . \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_2 . \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 . \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_3 . \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 . \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_1 . \mathbf{i}_3 = 0$ (II)

También $\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_3 = 0$ (III)

y $\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_3$ (IV)

$\mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3 = -\mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_1$ (V)

$\mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1 = -\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_2$ (VI)

§2.12.

De (I) y (II) del párrafo 2.11 se deduce que si los vectores **a**, **b** vienen expresados en la forma

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3,$$

y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i}_1 + b_2\mathbf{i}_2 + b_3\mathbf{i}_3,$

entonces $\mathbf{a} . \mathbf{b} = (a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3) . (b_1\mathbf{i}_1 + b_2\mathbf{i}_2 + b_3\mathbf{i}_3)$

i.e. $\mathbf{a} . \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$ (VII)

También si **b** forma un ángulo θ con **a**,

$$\mathbf{a} . \mathbf{b} = ab \cos \theta$$

por tanto $ab \cos \theta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$

i.e. $$\cos \theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{ab}.$$

Pero $a = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2}$ y $b = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)^{1/2}$ y las razones de dirección de las líneas que representan **a** y **b** son $a_1 : a_2 : a_3$ y

$b_1 : b_2 : b_3$ respectivamente. De aquí que el ángulo de dos líneas cuyas razones de dirección sean $a_1 : a_2 : a_3$ y $b_1 : b_2 : b_3$ es θ, de donde

$$\theta = \cos^{-1} \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{\frac{1}{2}}(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)^{\frac{1}{2}}}. \qquad \text{(VIII)}$$

§2.13.

Utilizando la notación de párrafo 2.12 y los resultados (III), (IV), (V), (VI) del párrafo 2.11, se deduce que

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3) \times (b_1\mathbf{i}_1 + b_2\mathbf{i}_2 + b_3\mathbf{i}_3)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{i}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{i}_3 \qquad \text{(IX)}$$

De (IX) se puede observar que los componentes del vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ son determinantes de segundo orden contenidos en la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

El resultado (IX) podría obtenerse desarrollando el determinante

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(X)}$$

tratando a $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ como si fueran cantidades algebraicas reales. Esta es una forma rápida de obtener el resultado y una forma simétrica fácil para recordarlo, pero los estudiantes deberían tener en cuenta que $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ *no son* cantidades algebraicas reales y que el

determinante (X) no es más que un símbolo convencional del resultado expresado en (IX).

Ejemplo 1. *Hallar el producto escalar de los vectores*

$$2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 - 4\mathbf{i}_3 \quad \text{y} \quad 4\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 - 3\mathbf{i}_3.$$

Sea $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 - 4\mathbf{i}_3,$

y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 - 3\mathbf{i}_3.$

Entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2)(4) + (3)(-2) + (-4)(-3),$

$= 8 - 6 + 12$

i.e. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 14.$

Ejemplo 2. *Hallar el producto vectorial de los vectores*

$$2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 - 5\mathbf{i}_3 \quad \text{y} \quad 3\mathbf{i}_1 - 4\mathbf{i}_2 + 6\mathbf{i}_3.$$

Sea $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 - 5\mathbf{i}_3$

$\mathbf{b} = 3\mathbf{i}_1 - 4\mathbf{i}_2 + 6\mathbf{i}_3$

Entonces

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (6-20)\mathbf{i}_1 + (-15-12)\mathbf{i}_2 + (-8-3)\mathbf{i}_3$ $\begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & -4 & 6 \end{vmatrix}$

i.e. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -14\mathbf{i}_1 - 27\mathbf{i}_2 - 11\mathbf{i}_3$

Ejemplo 3. *Calcular el trabajo desarrollado por una fuerza de 3 N que está actuando en paralelo a la línea AB, si su punto de aplicación se desplaza desde A a C, donde A, B, C, son los puntos cuyos vectores de posición son* $\mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3$, $3\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 6\mathbf{i}_3$, $5\mathbf{i}_1 + 7\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$ *respectivamente. Las distancias vienen dadas en metros.*

Supongamos que $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ son los vectores de posición de *A, B, C,* de donde

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{b} = 3\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 6\mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{c} = 5\mathbf{i}_1 + 7\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$$

Entonces $\overline{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$

i.e. $\overline{AB} = 2\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3$

De aquí que los cosenos de dirección de $\overline{AB}$, la línea de acción de la fuerza de 3 N, sean $2/\sqrt{17}$, $-2/\sqrt{17}$, $3/\sqrt{17}$ y si **F** representa la fuerza,

$$\mathbf{F} = 3(2\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3)/\sqrt{17} \text{ newtons.}$$

El desplazamiento del punto de aplicación de **F** es $\overline{AC}$, de donde

$$\overline{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$$

$$= 4\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 - 2\mathbf{i}_3, \text{ metros}$$

Por consiguiente el trabajo realizado por **F** es W, de donde

$$W = \overline{AC} \,.\, \mathbf{F}$$

$$= (4\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 - 2\mathbf{i}_3) \,.\, \frac{3}{\sqrt{17}} (2\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3) \text{ julios}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{17}} (8 - 6 - 6) \text{ julios}$$

$$W = -12/\sqrt{17} \text{ julios}$$

Ejemplo 4. *Hallar el momento relativo a un punto C de una fuerza de 7 N que actúa a lo largo de la línea AB, donde A, B, C, son los puntos* $(1, 2, -1), (3, 5, 4)$ *y* $(2, 3, 6)$ *respectivamente y las distancias vienen dadas en metros.*

Sean a, b, c, los vectores de posición de los puntos A, B, C, entonces

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{b} = 3\mathbf{i}_1 + 5\mathbf{i}_2 + 4\mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{c} = 2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 + 6\mathbf{i}_3$$

Sea **F** la fuerza de 7 N que actúa a lo largo de AB.

Siendo $\overline{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$

$$= 2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 + 5\mathbf{i}_3$$

entonces $\mathbf{F} = \dfrac{7}{\sqrt{38}} (2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 + 5\mathbf{i}_3)$ newtons.

Partiendo de que cualquier punto de la línea de acción de una fuerza puede tomarse como punto de aplicación, supongamos que A está tomado como punto de aplicación de **F**. Entonces el momento de **F** con relación a C es $\overline{CA} \times \mathbf{F} = \mathbf{G}$.

Pero $\overline{CA} = \mathbf{a} - \mathbf{c}$

i.e. $\overline{CA} = -\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 - 7\mathbf{i}_3$

por tanto

$$\mathbf{G} = \overline{CA} \times \mathbf{F}$$

$$= \frac{-35 + 147}{\sqrt{38}} \mathbf{i}_1 + \frac{-98 + 35}{\sqrt{38}} \mathbf{i}_2 + \frac{-21 + 14}{\sqrt{38}} \mathbf{i}_3 \text{ newton-metro unidades}$$

$$= \frac{112}{\sqrt{38}} \mathbf{i}_1 - \frac{63}{\sqrt{38}} \mathbf{i}_2 - \frac{7}{\sqrt{38}} \mathbf{i}_3 \text{ newton-metro unidades}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ -1 & -1 & -7 \\ 14/\sqrt{38} & 21/\sqrt{38} & 35/\sqrt{38} \end{vmatrix}$$

i.e. $\mathbf{G} = 7(16\mathbf{i}_1 - 9\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3)/\sqrt{38}$ newton-metro unidades

Ejemplos IIa

Hallar los productos escalares de los siguientes pares de vectores:

1. $-4\mathbf{i}_1 + 5\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3$ y $2\mathbf{i}_1 + 7\mathbf{i}_2 - 8\mathbf{i}_3$.
2. $3\mathbf{i}_1 + 9\mathbf{i}_2 - 2\mathbf{i}_3$ y $\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 - 4\mathbf{i}_3$.
3. $5\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3$ y $-2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3$.
4. $2\mathbf{i}_1 - 3\mathbf{i}_2 + 6\mathbf{i}_3$ y $2\mathbf{i}_1 - 3\mathbf{i}_2 - 5\mathbf{i}_3$.

Hallar los productos vectoriales de los siguientes pares de vectores:

5. $-2\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 - 3\mathbf{i}_3$ y $4\mathbf{i}_1 + 7\mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3$.
6. $2\mathbf{i}_1 - 3\mathbf{i}_2 + 5\mathbf{i}_3$ y $\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 - 3\mathbf{i}_3$.
7. $\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 - 8\mathbf{i}_3$ y $-3\mathbf{i}_1 - 5\mathbf{i}_2 + 4\mathbf{i}_3$.
8. $4\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3$ y $5\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 - 7\mathbf{i}_3$.

9. Hallar el trabajo desarrollado por una fuerza de 15 N que actúa en la dirección del desplazamiento $\overline{AB}$, si su punto de aplicación se traslada de A a C, si A, B, C, son los puntos (1, 3, 5), (2, 1, 3), (3, 4, 7) respectivamente y las medidas de longitud vienen dadas en metros.

10. Una fuerza de 21 N actúa a lo largo de la línea AB, donde A, B, son los puntos (1, 1, 3), (3, 4, 9) respectivamente. Hallar el momento de la fuerza con relación al punto (2, 2, 2), si las distancias vienen dadas en metros.

11. Hallar (i) el producto escalar, (ii) el producto vectorial, de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, donde los vectores de posición de A, B, C son $\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_3$, $5\mathbf{i}_1 + 6\mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3$, $7\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3$, respectivamente.

12. Hallar (i) el producto escalar, (ii) el producto vectorial, de $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ donde A, B, C, D, son los puntos (1, −1, 1), (2, 3, 4), (1, 3, 5), (2, 6, −4), respectivamente.

13. Una fuerza de 2 N actúa en la dirección $\overline{AB}$ donde A, B, son los puntos (2, 4, 3), (5, 5, 4). El punto de aplicación se desplaza desde A al punto C (6, 4, 4). Hallar el trabajo desarrollado por la fuerza de 2 N, partiendo de que las medidas de longitud vienen dadas en metros.

14. Una fuerza de 6 N actúa a lo largo de la línea AB, en la dirección del vector $\overline{AB}$, donde A, B, son los puntos (2, 3, 6), (1, 1, 8). Hallar el momento de esta fuerza respecto de C (0, 0, −1), si las distancias vienen dadas en metros.

15. Calcular los ángulos de un triángulo ABC donde A, B, C, son los puntos (1, 2, 4),(3, 1, −2), (4, 3, 1), respectivamente.

16. $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \ldots, \mathbf{F}_n$ son n fuerzas coplanarias localizadas en los puntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ cuyos vectores de posición respecto del origen O son $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$ respectivamente. Demostrar que la línea de acción de la resultante de $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \ldots, \mathbf{F}_n$ corta la línea que pasa por O en la dirección del vector unitario $\mathbf{i}$ a una distancia r de O, de donde

$$r\mathbf{i} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots + \mathbf{F}_n) = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{a}_3 \times \mathbf{F}_3 + \ldots + \mathbf{a}_n \times \mathbf{F}_n.$$

$ABCD$ es un cuadrado de 6 cm de lado. Fuerzas de 6, 4, 3, $4\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$ N actúan a lo largo de AB, AD, DC, BD, AC, respectivamente según las direcciones indicadas por el orden de las letras. Demostrar que la línea de acción de su resultante corta a la línea AB en un punto a 0,5 cm de A y hallar la distancia desde B al punto en el que esta línea de acción corta a BC.

17. Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, son los vectores de posición de los vértices de un triángulo ABC, demostrar que

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 2\Delta\mathbf{w}$$

donde Δ es el área del triángulo ABC y $\mathbf{w}$ es el vector unitario perpendicular al plano del triángulo ABC.

§2.14. Vector Area

Si $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, representan a los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, y θ es el ángulo formado por $\overline{OB}$ con $\overline{OA}$, y si $\mathbf{n}$ es el vector unitario perpendicular a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, de modo que $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$, formen un sistema normal dextrógiro, entonces por definición

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (ab \operatorname{sen} \theta)\, \mathbf{n}$$

Pero el área Δ del triángulo OAB viene dada por

$$\Delta = \tfrac{1}{2}ab \sin \theta$$

$$\therefore \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 2\Delta\mathbf{n},$$

o bien

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \Delta\mathbf{n}$$

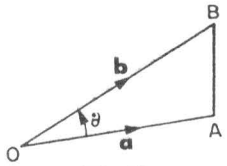


Fig. 22

Así pues el vector $1/2\ \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ tiene un módulo Δ y dirección normal al plano del triángulo *OAB*. Este vector, $1/2\ \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, se define como *vector área* de un triángulo *OAB*.

§2.15. Productos triples de vectores

Si **a**, **b**, **c**, son vectores, cualquier par de ellos puede multiplicarse vectorialmente para formar un nuevo vector **d**; el tercero de los vectores iniciales se puede entonces multiplicar por **d**, bien escalarmente para formar el llamado *producto triple escalar*, o bien vectorialmente para formar el *producto triple vectorial*.

§2.16. Producto triple escalar

Supongamos que **a**, **b**, **c**, son tres vectores no coplanarios que tomados en orden cíclico forman un sistema norma dextrógiro. Representemos **a**, **b**, **c** por $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ respectivamente.

Completar el paralelepípedo $OBDCAB'D'C'$, donde OA, BB', DD', CC', son aristas paralelas. Entonces si Δ es el área del triángulo OBC y α $(= 2\Delta)$ es el área del paralelogramo $OBDC$, según el párrafo 2.14

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = 2\Delta\mathbf{n}_1$$

i.e.

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \alpha\mathbf{n}_1$$

donde $\mathbf{n}_1$ es el vector unitario perpendicular al plano de **b**, **c** de tal

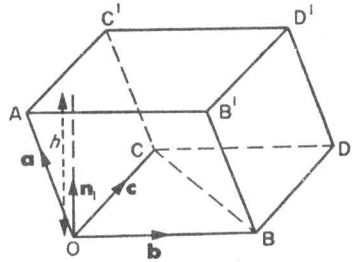


Fig. 23

modo que **b**, **c**, $\mathbf{n}_1$, forman un sistema dextrógiro. Si θ_1 es el ángulo entre **a** y $\mathbf{n}_1$,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot \alpha\mathbf{n}_1 \\ &= \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1) \\ &= \alpha(a \cos\theta_1) \\ &= \alpha h \\ &= V,\end{aligned}$$

donde h $(= a \cos\theta_1)$ es la altura y V el volumen del paralelepípedo $OBDCAB'D'C'$, teniendo a $OBCD$ como base. Con un argumento similar se puede demostrar que

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = V.$$

De aquí

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = V \qquad \text{(I)}$$

como

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$$

y

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$$

de (1) de arriba

por tanto $\quad \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}.$
Igualmente $\quad \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b},$
y $\quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$ (II)

Más aún, como $\quad \mathbf{b} \times \mathbf{c} = -(\mathbf{c} \times \mathbf{b}),$
entonces $\quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}).$
Igualmente $\quad \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}),$
y $\quad \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}).$ (III)

De las ecuaciones (I) se deduce que el valor de un producto triple escalar permanece inalterable si se cambia el orden de las letras, siempre que se mantenga el orden cíclico.

De las ecuaciones (II) se deduce que el valor del producto triple escalar permanece inalterable, si el punto y el aspa se intercambian.

De las ecuaciones (III) se deduce que si se intercambian un par de letras en un producto triple escalar, alterando así el orden cíclico, el signo del resultado cambia.

Es costumbre expresar el producto triple escalar de **a**, **b**, **c** mediante **[abc]**. Las ecuaciones III pueden expresarse más simplemente de la forma [acb] = −[**abc**].

Se deduce que si **a**, **b**, **c** son coplanarios, $V = 0$ y por consiguiente **[abc]** = 0.

§2.17.

Supongamos que con la notación de costumbre

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3,$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i}_1 + b_2\mathbf{i}_2 + b_3\mathbf{i}_3,$$
$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i}_1 + c_2\mathbf{i}_2 + c_3\mathbf{i}_3.$$

Entonces

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (b_2c_3 - b_3c_2)\mathbf{i}_1 + (b_3c_1 - b_1c_3)\mathbf{i}_2 + (b_1c_2 - b_2c_1)\mathbf{i}_3,$$

por tanto

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3) \cdot \{(b_2c_3 - b_3c_2)\mathbf{i}_1 \\ &\qquad + (b_3c_1 - b_1c_3)\mathbf{i}_2 + (b_1c_2 - b_2c_1)\mathbf{i}_3)\} \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)\end{aligned}$$

i.e. $$[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

§2.18. Producto Triple Vectorial

Supongamos que los vectores **a**, **b**, **c**, $\mathbf{n}_1$ se definen como en el párrafo 2.16 y supongamos que $\mathbf{n}_2$ es el vector unitario en dirección de **b**, mientras que $\mathbf{n}_3$ es el vector unitario en el plano de **b**,**c** de tal modo que $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ formen un sistema dextrógiro de vectores unitarios perpendiculares entre sí. Entonces si Δ es el área del triángulo *OBC* (ver fig. 23), y representa el producto vectorial $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$,

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\ &= \mathbf{a} \times (2\Delta\mathbf{n}_1) \\ &= 2\Delta(\mathbf{a} \times \mathbf{n}_1)\end{aligned}$$

Si $\mathbf{a} \times \mathbf{n}_1$ es un vector perpendicular al plano de **a** y $\mathbf{n}_1$, entonces **w** es un vector perpendicular a **a** y $\mathbf{n}_1$, es decir que **w** es un vector en el plano de **b** y **c**, perpendicular a **a**. Y así **w** se puede expresar de la siguiente forma

$$\mathbf{w} = \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c},$$

donde λ, μ son números reales.

Supongamos que $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, vienen dados en función de sus componentes según las direcciones de $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$, de la forma

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{n}_1 + a_2\mathbf{n}_2 + a_3\mathbf{n}_3$$
$$\mathbf{b} = b\mathbf{n}_2,$$
$$\mathbf{c} = c_2\mathbf{n}_2 + c_3\mathbf{n}_3$$

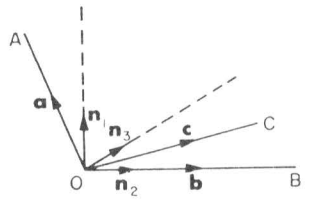


Fig. 24

Entonces $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = b\mathbf{n}_2 \times (c_2\mathbf{n}_2 + c_3\mathbf{n}_3) = bc_3\mathbf{n}_1$

De donde
$$\mathbf{w} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$
$$= (a_1\mathbf{n}_1 + a_2\mathbf{n}_2 + a_3\mathbf{n}_3) \times bc_3\mathbf{n}_1$$
$$= -a_2bc_3\mathbf{n}_3 + a_3bc_3\mathbf{n}_2$$

i.e.
$$\mathbf{w} = (a_3bc_3 + a_2bc_2)\mathbf{n}_2 - (a_2bc_2\mathbf{n}_2 + a_2bc_3\mathbf{n}_3)$$
$$= (a_2c_2 + a_3c_3)b\mathbf{n}_2 - (a_2b)(c_2\mathbf{n}_2 + c_3\mathbf{n}_3)$$
$$= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

Así $\lambda = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ y $\mu = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$,

por tanto $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

Ejemplos IIb

1. Hallar el producto triple escalar [abc] en los siguientes casos:

(i) $\mathbf{a} = \mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 + 5\mathbf{i}_3, \mathbf{b} = 2\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 + 7\mathbf{i}_3, \mathbf{c} = 3\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3$;
(ii) $\mathbf{a} = -3\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 6\mathbf{i}_3, \mathbf{b} = 4\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3, \mathbf{c} = 5\mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 - 2\mathbf{i}_3$;
(iii) $\mathbf{a} = 4\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 - 3\mathbf{i}_3, \mathbf{b} = \mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3, \mathbf{c} = 5\mathbf{i}_1 + 6\mathbf{i}_2 + 7\mathbf{i}_3$;
(iv) $\mathbf{a} = 8\mathbf{i}_1 - 3\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3, \mathbf{b} = 4\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3, \mathbf{c} = 3\mathbf{i}_1 - 4\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3$;
(v) $\mathbf{a} = 5\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 - 2\mathbf{i}_3, \mathbf{b} = 2\mathbf{i}_1 - 3\mathbf{i}_2 - 3\mathbf{i}_3, \mathbf{c} = 3\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 - 6\mathbf{i}_3$.

2. Hallar el producto triple vectorial $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ en los casos (i) a (v), del ejercicio anterior.

3. Hallar el producto triple escalar [pqr] y el producto triple vectorial $\mathbf{q} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p})$ en cada uno de los siguientes casos:

(i) $\mathbf{p} = 2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3, \mathbf{q} = 3\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3, \mathbf{r} = 2\mathbf{i}_1 + 5\mathbf{i}_2 - 4\mathbf{i}_3$;
(ii) $\mathbf{p} = 2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2, \mathbf{q} = 3\mathbf{i}_2 + 4\mathbf{i}_3, \mathbf{r} = 4\mathbf{i}_1 + 5\mathbf{i}_2 + 6\mathbf{i}_3$;
(iii) $\mathbf{p} = \mathbf{i}_1 - 3\mathbf{i}_2 + 4\mathbf{i}_3, \mathbf{q} = 2\mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3, \mathbf{r} = 3\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 - 3\mathbf{i}_3$;
(iv) $\mathbf{p} = 5\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3, \mathbf{q} = 2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_3, \mathbf{r} = 4\mathbf{i}_1 - 3\mathbf{i}_2 - 2\mathbf{i}_3$;
(v) $\mathbf{p} = 3\mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 + 5\mathbf{i}_3, \mathbf{q} = 7\mathbf{i}_1 + 24\mathbf{i}_2 + 25\mathbf{i}_3, \mathbf{r} = 5\mathbf{i}_1 + 13\mathbf{i}_2 + 12\mathbf{i}_3$.

4. Demostrar la fórmula

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c},$$

y comprobar en el caso en que $\mathbf{a} = \mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i}_1 - 3\mathbf{i}_2 + 4\mathbf{i}_3$.

5. Demostrar que si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ son tres vectores no nulos y $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, entonces $(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{b} = 0$.

Discutir el significado geométrico de este resultado.

6. Comprobar la fórmula

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c},$$

cuando

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2, \mathbf{b} = 3\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3, \mathbf{c} = 2\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3.$$

7. Si $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}$ son cuatro vectores cualesquiera, probar que:

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{s}) = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{s}) - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{s}).$$

CAPITULO III

§3.1.

Supongamos que el vector $\mathbf{r}$ es una función continua con valor constante de la variable escalar t. Supongamos que cuando t aumenta en una pequeña cantidad escalar δt, $\mathbf{r}$ aumenta en una pequeña cantidad vectorial $\delta\mathbf{r}$. Entonces la derivada de $\mathbf{r}$ con respecto a t se define

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}.$$

Así pues la existencia de la derivada depende de la existencia del límite

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}$$

La derivada de $\mathbf{r}$, cuando existe, es también por lo general una función de t y si $d\mathbf{r}/dt$ es diferenciable, su derivada es la *derivada segunda* de $\mathbf{r}$ respecto a t y se escribe $d^2\mathbf{r}/dt^2$. Lo mismo sucede para la tercera, cuarta, ... derivadas, las cuales se escriben

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}, \frac{d^4\mathbf{r}}{dt^4}, \ldots.$$

Si x, y, z son las componentes de $\mathbf{r}$ en las direcciones de los ejes de coordenadas Ox, Oy, Oz, podemos escribir

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_1 + y\mathbf{i}_2 + z\mathbf{i}_3,$$

donde las cantidades escalares x, y, z son funciones de t.

Entonces $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r} = (x + \delta x)\mathbf{i}_1 + (y + \delta y)\mathbf{i}_2 + (z + \delta z)\mathbf{i}_3$.

Por consiguiente $\delta\mathbf{r} = \delta x\mathbf{i}_1 + \delta y\mathbf{i}_2 + \delta z\mathbf{i}_3$

y $$\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t} = \frac{\delta x}{\delta t}\mathbf{i}_1 + \frac{\delta y}{\delta t}\mathbf{i}_2 + \frac{\delta z}{\delta t}\mathbf{i}_3$$

y en el límite, como $\delta t \to 0$, resulta

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i}_1 + \frac{dy}{dt}\mathbf{i}_2 + \frac{dz}{dt}\mathbf{i}_3$$

Igualmente $$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i}_1 + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{i}_2 + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{i}_3, \text{ etc.}$$

Ejemplo: Supongamos que

$$\mathbf{r} = (3t^2 + 2t)\mathbf{i}_1 + (\sin 3t)\mathbf{i}_2 + e^{4t}\mathbf{i}_3,$$

entonces $$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (6t + 2)\mathbf{i}_1 + (3\cos 3t)\mathbf{i}_2 + 4e^{4t}\mathbf{i}_3,$$

y $$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 6\mathbf{i}_1 - (9\sin 3t)\mathbf{i}_2 + 16e^{4t}\mathbf{i}_3.$$

§3.2. Derivada de una suma de dos vectores

Supongamos que los vectores $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son funciones diferenciables de la variable escalar t, y supongamos que

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$$

Entonces $$\mathbf{r} + \delta\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_1) + (\mathbf{r}_2 + \delta\mathbf{r}_2),$$

y $$\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_2$$

De aquí $$\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t} = \frac{\delta\mathbf{r}_1}{\delta t} + \frac{\delta\mathbf{r}_2}{\delta t}$$

y en el límite, como $\delta t \to 0$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}$$

Así pues, como en el álgebra escalar, *la derivada de la suma de dos vectores es igual a la suma de sus derivadas.*

§3.3. Derivada de un Producto

Supongamos que el escalar u y los vectores $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son funciones diferenciables de la variable escalar t.

(i) Supongamos que el vector $\mathbf{r}$ viene dado por

$$\mathbf{r} = u\mathbf{r}_1 .$$

Entonces con la notación de costumbre

$$\mathbf{r} + \delta\mathbf{r} = (u + \delta u)(\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_1),$$

$$= u\mathbf{r}_1 + u(\delta\mathbf{r}_1) + (\delta u)\mathbf{r}_1 + (\delta u)(\delta\mathbf{r}_1),$$

Por consiguiente $$\delta\mathbf{r} = u(\delta\mathbf{r}_1) + (\delta u)\mathbf{r}_1 + (\delta u)(\delta\mathbf{r}_1),$$

y $$\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t} = u\frac{\delta\mathbf{r}_1}{\delta t} + \frac{\delta u}{\delta t}\mathbf{r}_1 + \frac{(\delta u)(\delta\mathbf{r}_1)}{\delta t}$$

En el límite $\delta t \to 0$, esto se convierte en

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = u\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{du}{dt}\mathbf{r}_1$$

(ii) Supongamos que el escalar $\mathbf{r}$ viene dado por

$$r = \mathbf{r}_1 \,.\, \mathbf{r}_2$$

Entonces

$$r + \delta r = (\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_1) \,.\, (\mathbf{r}_2 + \delta\mathbf{r}_2),$$

i.e. $$r + \delta r = \mathbf{r}_1 \,.\, \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \,.\, (\delta\mathbf{r}_2) + (\delta\mathbf{r}_1) \,.\, \mathbf{r}_2 + (\delta\mathbf{r}_1) \,.\, (\delta\mathbf{r}_2)$$

De donde $$\delta r = \mathbf{r}_1 \,.\, (\delta\mathbf{r}_2) + (\delta\mathbf{r}_1) \,.\, \mathbf{r}_2 + (\delta\mathbf{r}_1) \,.\, (\delta\mathbf{r}_2),$$

y $$\frac{\delta r}{\delta t} = \mathbf{r}_1 \,.\, \frac{\delta\mathbf{r}_2}{\delta t} + \frac{\delta\mathbf{r}_1}{\delta t} \,.\, \mathbf{r}_2 + \frac{(\delta\mathbf{r}_1) \,.\, (\delta\mathbf{r}_2)}{\delta t}$$

En el límite $\delta t \to 0$, esto se transforma en

$$\frac{dr}{dt} = \mathbf{r}_1 \,.\, \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \,.\, \mathbf{r}_2$$

(iii) Supongamos que el vector $\mathbf{r}$ nos viene dado por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \,.$$

Luego

$$\mathbf{r} + \delta\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 + \delta\mathbf{r}_2)$$

$$= (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}_1 \times \delta\mathbf{r}_2) + (\delta\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) + (\delta\mathbf{r}_1 \times \delta\mathbf{r}_2);$$

por tanto $$\delta\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 \times \delta\mathbf{r}_2) + (\delta\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) + (\delta\mathbf{r}_1 \times \delta\mathbf{r}_2),$$

y $$\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t} = \left(\mathbf{r}_1 \times \frac{\delta\mathbf{r}_2}{\delta t}\right) + \left(\frac{\delta\mathbf{r}_1}{\delta t} \times \mathbf{r}_2\right) + \left(\frac{\delta\mathbf{r}_1}{\delta t} \times \delta\mathbf{r}_2\right).$$

En el límite $\delta t \to 0$, esto se convierte en

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \times \mathbf{r}_2$$

Así pues la derivada de un producto de dos funciones de las que una al menos es un vector, se halla de la misma manera que la derivada de un producto de dos funciones escalares, teniendo en cuenta que en el caso de un producto vectorial de dos vectores, no se altere el orden de las funciones $\mathbf{r}_1$ *y* $\mathbf{r}_2$.

§3.4. Derivada de un Triple Producto de tres Vectores

Sean $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, tres funciones diferenciables vectoriales en la variable escalar t.

(i) Sea $r = [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3]$.

Entonces

$$r = \mathbf{r}_1 . (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)$$

Por tanto, de 3.3 (ii),

$$\frac{dr}{dt} = \mathbf{r}_1 . \frac{d(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} . (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)$$

i.e. $$\frac{dr}{dt} = \mathbf{r}_1 . \left(\mathbf{r}_2 \times \frac{d\mathbf{r}_3}{dt}\right) + \mathbf{r}_1 . \left(\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \times \mathbf{r}_3\right) + \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} . (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)$$

i.e. $$\frac{dr}{dt} = \left[\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \frac{d\mathbf{r}_3}{dt}\right] + \left[\mathbf{r}_1 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \mathbf{r}_3\right] + \left[\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3\right].$$

(ii) Sea $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)$.

Entonces de 3.3 (iii)

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}_1 \times \frac{d(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)$$

i.e. $$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}_1 \times \left(\mathbf{r}_2 \times \frac{d\mathbf{r}_3}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \times \mathbf{r}_3\right) + \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)$$

i.e.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}_1 \times \left(\mathbf{r}_2 \times \frac{d\mathbf{r}_3}{dt}\right) + \mathbf{r}_1 \times \left(\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \times \mathbf{r}_3\right) + \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3).$$

Así pues, la derivada del triple producto escalar y vectorial de tres funciones vectoriales, se halla de la misma forma que la derivada de un producto de tres funciones escalares, con las limitaciones de que en el caso de un triple producto escalar, el orden cíclico de las tres funciones en el producto original debe mantenerse y en el caso de un triple producto vectorial, el orden de las funciones en el producto original debe permanecer inalterable.

Ejemplo 1. *Si* $\mathbf{a}$ *es un vector fijo, y los vectores* $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ *son funciones de la variable escalar* t, *hallar las derivadas de* (1) $\mathbf{a} . \mathbf{r}_1$, (2) $\mathbf{a} \times \mathbf{r}_1$, (3) $[a\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2]$, (4) $a\mathbf{r}_1 . \mathbf{r}_2$.

(1) Sea $r = \mathbf{a} . \mathbf{r}_1$.

Entonces $$\frac{dr}{dt} = \mathbf{a} . \frac{d\mathbf{r}_1}{dt},$$

Ya que $\mathbf{a}$ es constante y por tanto $\frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0$.

(2) Sea $\mathbf{r} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}_1$.

Entonces $$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

(3) Sea $r = [a\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2]$.

Entonces $$\frac{dr}{dt} = \left[a\mathbf{r}_1 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}\right] + \left[\mathbf{a} \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \mathbf{r}_2\right]$$

(4) Sea $r = a\mathbf{r}_1 . \mathbf{r}_2$.

Entonces $$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = a\mathbf{r}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + a\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \cdot \mathbf{r}_2$$

Ejemplo 2. *Si* $\mathbf{r}_1 = t^2\mathbf{i}_1 + t^3\mathbf{i}_2 + t\mathbf{i}_3$,

y $\mathbf{r}_2 = 2t\mathbf{i}_1 - 3t^2\mathbf{i}_2 + 2t^3\mathbf{i}_3$,

hallar la derivada respecto a t de $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ *y de* $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$.

Sea $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$.

Entonces $$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \times \mathbf{r}_2$$

$$= (t^2\mathbf{i}_1 + t^3\mathbf{i}_2 + t\mathbf{i}_3) \times (2\mathbf{i}_1 - 6t\mathbf{i}_2 + 6t^2\mathbf{i}_3)$$

$$+ (2t\mathbf{i}_1 + 3t^2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) \times (2t\mathbf{i}_1 - 3t^2\mathbf{i}_2 + 2t^3\mathbf{i}_3)$$

$$= 6(t^5 + t^2)\mathbf{i}_1 - (6t^4 - 2t)\mathbf{i}_2 - 8t^3\mathbf{i}_3$$

$$+ (6t^5 + 3t^2)\mathbf{i}_1 - (4t^4 - 2t)\mathbf{i}_2 - 12t^3\mathbf{i}_3$$

i.e. $$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 3t^2(4t^3 + 3)\mathbf{i}_1 - 2t(5t^3 - 2)\mathbf{i}_2 - 20t^3\mathbf{i}_3$$

Alternativamente, el producto $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ puede calcularse (ver Capítulo II, Ej. 2) antes de ser diferenciado.

Sea $s = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$.

Entonces $$\frac{ds}{dt} = \mathbf{r}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \cdot \mathbf{r}_2$$

i.e. $$\frac{ds}{dt} = (t^2\mathbf{i}_1 + t^3\mathbf{i}_2 + t\mathbf{i}_3) \cdot (2\mathbf{i}_1 - 6t\mathbf{i}_2 + 6t^2\mathbf{i}_3)$$

$$+ (2t\mathbf{i}_1 + 3t^2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) \cdot (2t\mathbf{i}_1 - 3t^2\mathbf{i}_2 + 2t^3\mathbf{i}_3),$$

i.e. $$\frac{ds}{dt} = (2t^2 - 6t^4 + 6t^3) + (4t^2 - 9t^4 + 2t^3),$$

i.e. $$\frac{ds}{dt} = 6t^2 + 8t^3 - 15t^4.$$

Ejemplo 3. *Si* $\mathbf{r} = e^{3t}\mathbf{a} + e^{4t}\mathbf{b}$ *donde* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *son vectores constantes, demostrar que*

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - 7\frac{d\mathbf{r}}{dt} + 12\mathbf{r} = 0.$$

Como $\mathbf{r} = e^{3t}\mathbf{a} + e^{4t}\mathbf{b}$,

entonces $$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 3e^{3t}\mathbf{a} + 4e^{4t}\mathbf{b},$$

y $$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 9e^{3t}\mathbf{a} + 16e^{4t}\mathbf{b},$$

por tanto $$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - 7\frac{d\mathbf{r}}{dt} + 12\mathbf{r}$$

$$= 9e^{3t}\mathbf{a} + 16e^{4t}\mathbf{b} - 21e^{3t}\mathbf{a} - 28e^{4t}\mathbf{b}$$

$$+ 12e^{3t}\mathbf{a} + 12e^{4t}\mathbf{b}$$

$$= 0$$

§3.5. Integración

Lo mismo que en el cálculo numérico, el proceso de integración consiste en dar una cierta función vectorial $\mathbf{r}$ de la variable escalar t y hallar otra función $\mathbf{R}$ de t, de tal forma que $d\mathbf{R}/dt = \mathbf{r}$. Cuando este proceso pueda realizarse podemos escribir $\mathbf{R} = \int \mathbf{r}dt$.

Vamos a suponer que la función $\mathbf{R}$ se ha conseguido, de tal forma que $d\mathbf{R}/dt = \mathbf{r}$, entonces si $\mathbf{c}$ es un vector constante cualquiera, $d(\mathbf{R} + \mathbf{c})/dt$ es también igual a $\mathbf{r}$. De aquí que, por lo general, si se sabe que $d\mathbf{R}/dt = \mathbf{r}$, es costumbre escribir

$$\int \mathbf{r}\, dt = \mathbf{R} + \mathbf{c},$$

donde c es una constante cuyo valor puede determinarse en un problema particular por las condiciones iniciales del problema.

§3.6.

Para realizar la integración, es preciso expresar la función que se va a integrar, de tal forma que se vea fácilmente que es la derivada de otra función conocida.

e.g. $$\int \mathbf{a} \sin 3t dt = -\tfrac{1}{3}\mathbf{a} \cos 3t + \mathbf{c}.$$

Los siguientes ejercicios tomados del cálculo escalar podrán encontrarse de utilidad:

(i) Si $d^2\mathbf{r}/dt^2 = \mu\mathbf{r}$, donde μ es una constante escalar, entonces

$$2\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\mu\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{r},$$

i.e. $$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mu\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} + c$$

donde c es una constante escalar.

De donde $$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^2 = \mu r^2 + c$$

(ii) Si

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - (m+n)\frac{d\mathbf{r}}{dt} + mn\mathbf{r} = 0,$$

donde m, n son escalares de la forma $m = c + ik$ y $n = c - ik$, de modo que ambas $(m+n)$ y mn sean reales, entonces

$$\mathbf{r} = e^{mt}\mathbf{a} + e^{nt}\mathbf{b}$$

donde a, b son vectores constantes;

i.e. $$\mathbf{r} = e^{ct}(e^{ikt}\mathbf{a} + e^{-ikt}\mathbf{b}),$$

i.e. $$\mathbf{r} = e^{ct}(\mathbf{A}\cos kt + \mathbf{B}\sin kt)$$

donde **A**, **B** son vectores constantes y funciones de a, b.

Ejemplos III

1. Diferenciar con respecto a t:

(i) $(2\sin t)\mathbf{i}_1 + (3\cos t)\mathbf{i}_2 + (\sin 2t)\mathbf{i}_3$;
(ii) $3t^4\mathbf{i}_1 + 5t^3\mathbf{i}_2 + 4t\mathbf{i}_3$;
(iii) $e^{2t}\mathbf{i}_1 + e^{3t}\mathbf{i}_2 + e^{4t}\mathbf{i}_3$;
(iv) $(3t^2+5)\mathbf{i}_1 + (t^3 - 4t^2 + 3t)\mathbf{i}_2 + (\sin 4t)\mathbf{i}_3$;
(v) $(t^2+1)^4\mathbf{i}_1 + (\log t)\mathbf{i}_2 + 3t^4\mathbf{i}_3$.

2. Si $\mathbf{r}_1 = 2t\mathbf{i}_1 + 3t^2\mathbf{i}_2 + 5t^3\mathbf{i}_3$, y $\mathbf{r}_2 = t^3\mathbf{i}_1 + t\mathbf{i}_2 - t^3\mathbf{i}_3$, y $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}_1 - 3\mathbf{i}_2 + 4\mathbf{i}_3$, hallar las derivadas respecto a t de:

(i) $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$; (ii) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}_1$; (iii) $\mathbf{a}\times\mathbf{r}_2$;
(iv) $\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2$; (v) $(\mathbf{a}+\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{r}_2$; (vi) $[\mathbf{a}\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2]$;
(vii) $\mathbf{a}\times(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)$; (viii) $\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_1$; (ix) $\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2$;
(x) $\mathbf{r}_2\cdot\mathbf{r}_2$.

3. Si a, b son vectores constantes y $\mathbf{r} = (\cos 2t)\,\mathbf{a} + (\operatorname{sen} 2t)\,\mathbf{b}$, demostrar que

(i) $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 4\mathbf{r} = 0$, y

(ii) $\mathbf{r}\times\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

4. Calcular las siguientes integrales

(i) $\int (t^2\mathbf{i}_1 + t\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3)dt$; (ii) $\int \{(\sin t)\mathbf{i}_1 + (\cos t)\mathbf{i}_2 + t\mathbf{i}_3\}dt$;

(iii) $\int \mathbf{a}e^t dt$; (iv) $\int (t\mathbf{i}_1 + t^3\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3)\cdot(\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2)dt$.

5. Verificar que

$$\int\Big(\{\mathbf{i}_1 + (\cos t)\mathbf{i}_2\} \times \{(\cos t)\mathbf{i}_1 - t\mathbf{i}_2\} + \{t\mathbf{i}_1 + (\sin t)\mathbf{i}_2\} \times \{(-\sin t)\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2\}\Big)dt$$

es igual a $-\{t^2 + (\sin t)(\cos t)\}\mathbf{i}_3$.

6. Calcular las siguientes integrales

(i) $\int e^t(1 + t)\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\, dt$,

(ii) $\int \{(\sin t)\mathbf{a} + (\cos t)\mathbf{b}\} \times \{(\cos t)\mathbf{a} + (\sin t)\mathbf{b}\}dt$,

donde a, b son vectores constantes.

7. Demostrar que si $\mathbf{r}_1 = t\mathbf{a} + \frac{1}{t}\mathbf{b}$, y $\mathbf{r}_2 = \frac{1}{t}\mathbf{a} + t\mathbf{b}$,

donde a, b son vectores constantes, entonces

$$\frac{d(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)}{dt} = 2\left(t + \frac{1}{t^3}\right)\mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

8. Diferenciar con respecto a t el vector $36t^3\mathbf{i}_1 + (\log t)\mathbf{i}_2 + \frac{1}{t}\mathbf{i}_3$.

9. Diferenciar con respecto a t el vector (i) $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$, (ii) $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$, donde $\mathbf{r}_1 = t^2\mathbf{i}_1 - t\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3$ y $\mathbf{r}_2 = 3\mathbf{i}_1 + t\mathbf{i}_2 - t^2\mathbf{i}_3$.

CAPITULO IV

§4.1.

Sea O un punto de origen. En el momento t un punto móvil se encuentra en P, cuyo vector de posición es $\mathbf{r}$. Después de un pequeño intervalo de tiempo δt, el punto P se ha desplazado hasta P', cuyo vector de posición es $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$. Sea δs la longitud del arco PP'.

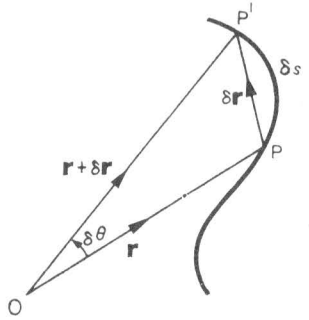


Fig. 25

Entonces $\overline{PP'} = \delta\mathbf{r}$,

y $PP' = |\,\delta\mathbf{r}\,| \doteq \delta s$.

Si τ es el vector unitario a lo largo de la tangente en P

$$\delta\mathbf{r} \to \tau\,(\delta s)$$

y si v es la velocidad del punto móvil en el momento t,

$$\mathbf{v} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

También

$$\mathbf{v} = \lim_{\delta t \to 0} \left(\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta s}\right)\left(\frac{\delta s}{\delta t}\right) = \tau v$$

donde $v = |\mathbf{v}| = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta s}{\delta t}$ que es la aceleración del punto móvil a lo largo de su recorrido.

Si **f** es la aceleración del punto móvil,

$$\mathbf{f} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

o bien

$$\mathbf{f} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}.$$

§4.2.

Cuando el punto móvil se traslada de P a P', supongamos que la línea que lo une con el punto de origen gira un ángulo $\delta\theta$, de tal forma que $POP' = \delta\theta$. Sea Q un punto sobre OP' tal que $OQ = OP = r$.

Entonces $QP' = \delta r$,

y $PQ \simeq r\,\delta\theta$.

Cuando $\delta t \to 0$, las rectas OP, OP' pueden tomarse como perpendiculares a PQ.

Sean $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$ los vectores unitarios a lo largo de OP y en la dirección transversal, dicha *dirección transversal* se define como la direc-

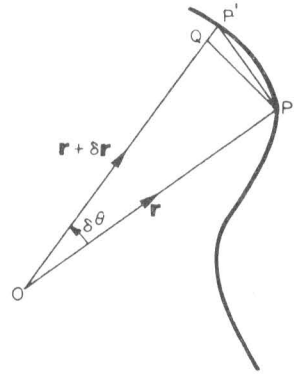


Fig. 26

ción perpendicular a OP, en el plano formado por OP, OP' cuyo sentido positivo es el de $\overline{PQ}$. Entonces cuando $\delta t \to 0$, $\mathbf{l}_2$ está en dirección $\overline{PQ}$. Sea $\mathbf{l}_3$ un tercer vector unitario, perpendicular al plano de OP, OP' de tal modo que $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_3$ forman un sistema de vectores unitarios dextrógiro, perpendiculares entre sí. Entonces con la misma notación

$$\mathbf{v} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t},$$

i.e.

$$\mathbf{v} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\overline{PP'}}{\delta t}$$

i.e.

$$\mathbf{v} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\overline{PQ} + \overline{QP'}}{\delta t}$$

i.e.

$$\mathbf{v} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\overline{PQ}}{\delta t} + \lim_{\delta t \to 0} \frac{\overline{QP'}}{\delta t}$$

i.e.

$$\mathbf{v} = r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{l}_2 + \frac{dr}{dt}\mathbf{l}_1$$

i.e.

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{l}_1 + r\dot{\theta}\mathbf{l}_2. \qquad \text{(I)}$$

§4.3.

Utilizando la misma notación que en los párrafos anteriores, sean $\delta\mathbf{l}_1$, $\delta\mathbf{l}_2$ pequeños incrementos de $\mathbf{l}_1$ y $\mathbf{l}_2$ cuando el punto móvil se desplaza de P a P' de modo que $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$ estén en las direcciones OP y la dirección transversal, mientras $\mathbf{l}_1 + \delta\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2 + \delta\mathbf{l}_2$ son tam-

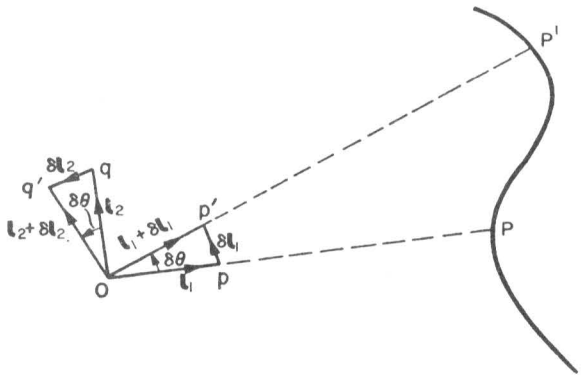


Fig. 27

bién vectores unitarios, pero en las direcciones $\overline{OP'}$ y perpendicular a $\overline{OP'}$ respectivamente. Sean Op y Op' vectores unidad y hagamos que corten en OP y OP'. Tracemos Oq y Oq', de longitud unidad, perpendiculares a Op y Op' de tal modo que $\overline{Op}$, $\overline{Oq}$ representan a $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$ y $\overline{Op'}$, $\overline{Oq'}$ a $\mathbf{l}_1 + \delta\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2 + \delta\mathbf{l}_2$. Entonces $\overline{pp'} = \delta\mathbf{l}_1$ y $\overline{qq'} = \delta\mathbf{l}_2$.

Pero $\quad pp' \simeq Op\delta\theta, \quad$ y $\quad qq' \simeq Oq\delta\theta,$

i.e. $\quad pp' \simeq \delta\theta, \quad$ y $\quad qq' \simeq \delta\theta.$

Como pp' está en la dirección de $\overline{Oq}$ y $\overline{qq'}$ en la dirección de pO, entonces como $\delta t \to 0$,

$$\overline{pp'} \to (\delta\theta)\mathbf{l}_2 \quad \text{y} \quad \overline{qq'} \to (\delta\theta)(-\mathbf{l}_1)$$

Pero $\quad \overline{pp'} = \delta\mathbf{l}_1 \quad$ y $\quad \overline{qq'} = \delta\mathbf{l}_2$

Por tanto $\quad \delta\mathbf{l}_1 \to (\delta\theta)\mathbf{l}_2, \quad$ y $\quad \delta\mathbf{l}_2 \to -(\delta\theta)\mathbf{l}_1,$

i.e. $\quad \dfrac{d\mathbf{l}_1}{dt} = \dot\theta\,\mathbf{l}_2, \quad$ y $\quad \dfrac{d\mathbf{l}_2}{dt} = -\dot\theta\,\mathbf{l}_1$

§4.4.

Según 4.2, $\qquad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot r\mathbf{l}_1 + r\dot\theta\mathbf{l}_2$

y según 4.1, $\qquad \mathbf{f} = \ddot{\mathbf{r}} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$

De donde $\qquad \mathbf{f} = \dfrac{d}{dt}(\dot r\mathbf{l}_1 + r\dot\theta\mathbf{l}_2),$

$$\mathbf{f} = \ddot r\,\mathbf{l}_1 + \dot r\frac{d\mathbf{l}_1}{dt} + \dot r\dot\theta\mathbf{l}_2 + r\ddot\theta\mathbf{l}_2 + r\dot\theta\frac{d\mathbf{l}_2}{dt}$$

$$\mathbf{f} = \ddot r\mathbf{l}_1 + \dot r\dot\theta\mathbf{l}_2 + \dot r\dot\theta\mathbf{l}_2 + r\ddot\theta\mathbf{l}_2 - r\dot\theta^2\mathbf{l}_1$$

$$\mathbf{f} = (\ddot r - r\dot\theta^2)\mathbf{l}_1 + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta)\mathbf{l}_2.$$

Así pues la componente radial de aceleración es $(\ddot{\mathrm{r}} - \mathrm{r}\dot\theta^2)$, y la componente transversal es $(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)$ ó $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot\theta)$.

Ejemplo 1. *Un punto se desplaza de modo que en el momento t su vector de posición viene dado por*

$$\mathbf{r} = (\sin 2t)\mathbf{i}_1 + (\cos 3t)\mathbf{i}_2 + e^t\mathbf{i}_3.$$

Hallar la velocidad y la aceleración del punto en el momento t.

Como $\qquad \mathbf{r} = (\sin 2t)\mathbf{i}_1 + (\cos 3t)\mathbf{i}_2 + e^t\mathbf{i}_3,$

entonces $\dot{\mathbf{r}} = (2\cos 2t)\mathbf{i}_1 - (3\sin 3t)\mathbf{i}_2 + e^t\mathbf{i}_3$,

y $\ddot{\mathbf{r}} = -(4\sin 2t)\mathbf{i}_1 - (9\cos 3t)\mathbf{i}_2 + e^t\mathbf{i}_3$

De aquí que la velocidad tenga las componentes $2\cos 2t$, -3 sen $3t$ y e^t; y la aceleración tenga las componentes -4 sen $2t$ y $-9\cos 3t$, e^t.

Ejemplo 2. *Una partícula se mueve en la curva plana* $r = a$ sen θ, *donde a es un número constante. Hallar las componentes transversal y radial de la velocidad y aceleración en cada momento t.*

Como la partícula se mueve en una curva plana, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ son la velocidad y aceleración angular de la recta que une la partícula con el punto de origen.

La ecuación de la trayectoria de la partícula es

$$r = a\sin\theta,$$

Por tanto $\dot{r} = a(\cos\theta)\dot{\theta}$.

y $\ddot{r} = (-a\sin\theta)\dot{\theta}^2 + (a\cos\theta)\ddot{\theta}$.

De aquí, si $\mathbf{v}$ es la velocidad de la partícula

$$\mathbf{v} = (a\cos\theta)\dot{\theta}\mathbf{l}_1 + r\dot{\theta}\mathbf{l}_2$$

i.e. $$\mathbf{v} = (a\cos\theta)\dot{\theta}\mathbf{l}_1 + (a\sin\theta)\dot{\theta}\mathbf{l}_2$$

y si $\mathbf{f}$ es la aceleración de la partícula,

$$\mathbf{f} = \{(-a\sin\theta)\dot{\theta}^2 + (a\cos\theta)\ddot{\theta} - r\dot{\theta}^2\}\mathbf{l}_1 + \{(2a\cos\theta)\dot{\theta}^2 + r\ddot{\theta}\}\mathbf{l}_2$$

i.e. $$\mathbf{f} = a\{(\cos\theta)\ddot{\theta} - 2(\sin\theta)\dot{\theta}^2\}\mathbf{l}_1 + a\{2(\cos\theta)\dot{\theta}^2 + (\sin\theta)\ddot{\theta}\}\mathbf{l}_2$$

Por tanto, las componentes transversales y radiales de la velocidad

son $(a\cos\theta)\dot{\theta}$ y $(a$ sen $\theta)\dot{\theta}$, mientras que las componentes transversales y radiales de la aceleración son, $a\{(\cos\theta)\ddot{\theta} - 2(\text{sen }\theta)\dot{\theta}^2\}$ y $a\{2(\cos\theta)\dot{\theta}^2 + (\text{sen }\theta)\theta\}$ respectivamente.

Ejemplos IVa

1. Hallar la velocidad y aceleración de una partícula que se mueve de tal forma que en un momento t su vector de posición es $\mathbf{r}$, siendo:

(i) $\mathbf{r} = (\text{sen } t)\,\mathbf{i}_1 + (\cos t)\,\mathbf{i}_2 + t\mathbf{i}_3$;
(ii) $\mathbf{r} = t^3\mathbf{i}_1 + t^2\mathbf{i}_2 + 3t\mathbf{t}_3$;
(iii) $\mathbf{r} = (\log t)\,\mathbf{i}_1 - e^{2t}\mathbf{i}_2 + t^2\mathbf{i}_3$;
(iv) $\mathbf{r} = \mathbf{a}e^{2t}$ donde a es un vector constante;
(v) $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ sen $2t + \mathbf{b}\cos 2t$ donde a y b son vectores constantes.

2. Hallar la velocidad y la aceleración de una partícula que se mueve a lo largo de la curva plana $r = ae^{\theta}$ de tal modo que la recta que une la partícula con el punto de origen gire con velocidad angular constante ω.

3. Hallar las componentes transversales y radiales de la aceleración de una partícula P que se mueve en la curva plana $3/r = 1 + \cos\theta$ de tal forma que OP gire con una velocidad angular constante ω, siendo O el punto de origen.

4. Hallar la velocidad y la aceleración de una partícula que se mueve de tal forma que en el momento t su vector de posición $\mathbf{r}$ venga dado por

(i) $\mathbf{r} = a(t - \sin t)\mathbf{i}_1 + a(1 - \cos t)\mathbf{i}_2 + bt\mathbf{i}_3$;
(ii) $\mathbf{r} = a(\cos t)\mathbf{i}_1 + a\,(\sin t)\mathbf{i}_2 + a\,(\cos 2t)\mathbf{i}_3$.

5. Si una partícula se mueve a lo largo de la curva plana $r = a\theta$ donde $\theta = kt$, hallar las componentes transversal y radial de su velocidad y aceleración.

6. Hallar las componentes transversales y radiales de la velocidad y aceleración de una partícula que se mueve a lo largo de la curva plana si:

(i) la ecuación de la curva es $r = a/\theta$, y $\theta = t + 1/t$;
(ii) la ecuación de la curva es $r^2\theta = 4$, y $\theta = t/2$;
(iii) la ecuación de la curva es $r = 1 - 1/\theta$, y $\theta = e^t$;
(iv) la ecuación de la curva es $r = 4 - \cos\theta$, y $\theta = 2t$.

7. Hallar las componentes transversales y radiales de la velocidad y acele-

ración de una partícula que se mueve a lo largo de una curva plana de tal modo que $r^2\dot{\theta} = 1$, si la ecuación de la curva es

(i) $r = 6/(2 - \cos\theta)$; (ii) $r = 5/(3 + 2\cos\theta)$.

8. Hallar la velocidad y aceleración de una partícula que se mueve a lo largo de la recta $\mathbf{r} = \mathbf{a} + p\mathbf{b}$ donde **a** y **b** son vectores constantes y p es una función escalar de t, de modo que

(i) $p = 3t^2$;
(ii) $p = 4t$;
(iii) $p = \sin t$;
(iv) $p = t + \log t$.

§4.5. Momento

Si en un instante t una partícula de masa m se sitúa en un punto P, cuyo vector de posición referido a un punto de origen dado O es **r**, su *momento lineal* se define como el vector $m\dot{\mathbf{r}}$. El producto $\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}$ se denomina *momento del momento* o *momento angular* de la partícula y es el momento respecto de O de un vector $m\dot{\mathbf{r}}$ trazado por P. El *momento lineal* se denomina simplemente *momento*.

Si **K** denota un momento lineal y **H** un momento angular, de una partícula que se mueve y cuyo vector de posición en un instante t es **r**, entonces

$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times \mathbf{K}$$

§4.6. Leyes del Movimiento de Newton aplicadas a una partícula

I. *Todo cuerpo se mantiene en su estado de reposo o de movimiento uniforme en una línea recta, a no ser que se le obligue a modificar ese estado mediante una fuerza externa que se le aplique.*

El movimiento implica una dirección y de aquí que lo que cambie el movimiento de un cuerpo deba ser un vector, y éste se denomina *fuerza*.

II. *La variación del momento lineal de un cuerpo es proporcional a la fuerza externa aplicada y se realiza en la misma dirección.*

Así pues, si una partícula de masa m impulsada por una fuerza **F** está en un punto cuyo vector de posición es **r** en el instante t, entonces

$$\mathbf{F} \propto \frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{r}}),$$

i.e. $$\mathbf{F} \propto m\ddot{\mathbf{r}}, \text{ si } m \text{ es constante}$$

Si las unidades se han elegido oportunamente (las *unidades absolutas* de la mecánica clásica), esto puede representarse así

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{K}}{dt}.$$

III. *A cada acción corresponde una reacción igual y opuesta.*

Así pues, si un cuerpo A actúa sobre un cuerpo B con una fuerza **F**, entonces B actuará sobre A con una fuerza $-\mathbf{F}$.

§ 4.7.

Si una fuerza **F** actúa sobre una partícula de masa m cuyo vector de posición en un instante t es **r**, entonces

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}},$$

Por tanto $$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}}. \qquad (1)$$

Ahora bien $$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}$$

por tanto $$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}}.$$

Pero $\quad \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} = 0$

por tanto $\quad \dfrac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}}.$ (2)

Así, de (1) y (2)

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{H}}{dt}$$

es decir. el momento, respecto de un punto arbitrario O, de la fuerza que actúa sobre una partícula, es igual a la variación del momento angular de la partícula con respecto a O. Este resultado es análogo a la afirmación de que *la fuerza que actúa sobre una partícula es igual a la variación del momento lineal de la partícula;* y las dos afirmaciones juntas constituyen la Segunda Ley de Newton generalmente aplicable a la mecánica vectorial.

Ejemplo 3. *Una partícula de 2 kg de masa arranca del punto de origen con velocidad de 15 m/s a lo largo de la recta cuyas razones son 1 : 2 : 2. La partícula es actuada por una fuerza cuyo valor en cada momento t es* $(2\mathbf{i}_1 + t\mathbf{i}_2 + t^2\mathbf{i}_3)$ *N donde t se mide en segundos. Hallar la posición de la partícula en el instante t.*

Sea $\mathbf{r}$ el vector de posición de la partícula en el instante t. Entonces

$$2\ddot{\mathbf{r}} = 2\mathbf{i}_1 + t\mathbf{i}_2 + t^2\mathbf{i}_3$$

por tanto $\quad 2\dot{\mathbf{r}} = 2t\mathbf{i}_1 + \frac{1}{2}t^2\mathbf{i}_2 + \frac{1}{3}t^3\mathbf{i}_3 + \mathbf{a}$ (1)

donde $\mathbf{a}$ es un vector constante

Pero si $\quad t = 0,\ \dot{\mathbf{r}} = 15(\frac{1}{3}\mathbf{i}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{i}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{i}_3)$ (2)

entonces $\quad 30(\frac{1}{3}\mathbf{i}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{i}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{i}_3) = 0 + \mathbf{a}$

Así la ecuación (1) se puede escribir

$$2\dot{\mathbf{r}} = (2t + 10)\mathbf{i}_1 + (\tfrac{1}{2}t^2 + 20)\mathbf{i}_2 + (\tfrac{1}{3}t^3 + 20)\mathbf{i}_3$$

por tanto $2\mathbf{r} = (t^2 + 10t)\mathbf{i}_1 + (\frac{1}{6}t^3 + 20t)\mathbf{i}_2 + (\frac{1}{12}t^4 + 20t)\mathbf{i}_3 + \mathbf{b},$

donde $\mathbf{b}$ es un vector constante.

Pero $\mathbf{r} = 0$ cuanto $t = 0$, por tanto $\mathbf{b} = 0$,

Así pues $\quad \mathbf{r} = (\frac{1}{2}t^2 + 5t)\mathbf{i}_1 + (\frac{1}{12}t^3 + 10t)\mathbf{i}_2 + (\frac{1}{24}t^4 + 10t)\mathbf{i}_3.$

Ejemplo 4. *Una partícula de 5 kg de masa se lanza desde el punto (2, 3, 6) con una velocidad de 70 m/s. Si la partícula está en el punto cuyo vector de posición es* $\mathbf{r}$ *en el instante t y se actúa mediante una fuerza de* $(-5\mathbf{r})$ *N, Hallar la velocidad de la partícula cuando se encuentra a 15 m del origen.*

Como la partícula está sometida a una fuerza de $(-5\mathbf{r})$ *N*, entonces

$$5\ddot{\mathbf{r}} = -5\mathbf{r},$$

i.e. $\quad \ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{r}.$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación escalarmente por $2\dot{\mathbf{r}}$,

$$2\dot{\mathbf{r}} \,.\, \ddot{\mathbf{r}} = -2\dot{\mathbf{r}} \,.\, \mathbf{r},$$

por tanto $\quad \dot{\mathbf{r}} \,.\, \dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{r} \,.\, \mathbf{r} + a,$ (1)

donde a es una constante escalar.

La ecuación (1) puede representarse $v^2 = a - r^2$, donde $v\ (=\dot{\mathbf{r}})$ es la velocidad de la partícula en el instante t. Pero $v = 70$ cuando $r^2 = 2^2 + 3^2 + 6^2 = 49$,

por tanto $\quad 4900 = a - 49$

$$a = 4949.$$

Luego la ecuación (2) puede escribirse

$$v^2 = 4949 - r^2 \qquad (3)$$

Si v_1 es la velocidad de la partícula cuando está a 15 m del origen, entonces $v = v_1$ cuando $r = 15$. De aquí, según la ecuación (3)

$$v_1^2 = 4949 - 225$$
$$= 4724,$$

por tanto $v = \sqrt{(4724)}$ m/s

i.e. $v = 68.73$ m/s

Ejemplo 5. *Una partícula se lanza con una velocidad de 60 m/s en una dirección que forma un ángulo de* $\cos^{-1} 4/5$ *con la vertical. Hallar la velocidad y la posición de la partícula en el instante t, teniendo en cuenta que la partícula se mueve libremente bajo la acción de la gravedad.*

Sea *OX*, *OY*, *OZ*, un sistema de ejes dextrógiro mutuamente perpendiculares a partir del punto de proyección *O*, de tal forma que *OZ* esté a lo largo de la vertical y *OY*, *OZ* estén en el mismo

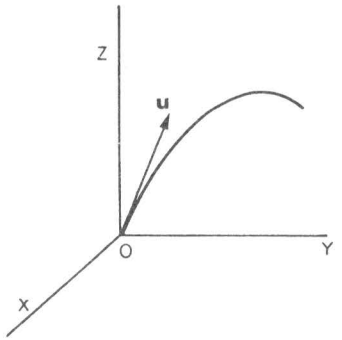


Fig. 28

plano de la velocidad inicial **u**. Entonces, con la notación usual, si **r** es el vector posición de la partícula en el instante *t*,

$$\ddot{\mathbf{r}} = -g\mathbf{i}_3,$$

por tanto $$\dot{\mathbf{r}} = -gt\mathbf{i}_3 + \mathbf{a},$$

donde **a** es un vector constante. Pero cuando $t = 0$,

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{u} = 36\mathbf{i}_2 + 48\mathbf{i}_3$$

por tanto $$\mathbf{a} = 36\mathbf{i}_2 + 48\mathbf{i}_3.$$

Así $$\dot{\mathbf{r}} = -gt\,\mathbf{i}_3 + 36\mathbf{i}_2 + 48\mathbf{i}_3. \qquad (1)$$

Integrando,

$$\mathbf{r} = -\tfrac{1}{2}gt^2\mathbf{i}_3 + (3^{\prime\prime} + 48\mathbf{i}_3)t + \mathbf{b},$$

donde **b** es un vector constante. Pero $\mathbf{r} = 0$ cuando $t = 0$,

por tanto $$\mathbf{b} = 0,$$

así $$\mathbf{r} = 36t\mathbf{i}_2 + (48t - \tfrac{1}{2}gt^2)\mathbf{i}_3. \qquad (2)$$

La ecuación (1) se puede escribir

$$\dot{\mathbf{r}} = 36\mathbf{i}_2 + (48 - gt)\mathbf{i}_3. \qquad (3)$$

De aquí que en el instante *t* la partícula está en el punto $(0, 36t, 48t - 4{,}9t^3)$ m y moviéndose con velocidad **v** de donde $\mathbf{v} = 36\mathbf{i}_2 + {} + (48 - 9{,}8t)\,\mathbf{i}_3$ m/s.

Ejemplos IVb

Partimos de que *g* es 9,8 m/s^2, y tomamos el tiempo *t* en segundos, si no se indica lo contrario.

1. Una partícula de masa 19 kg es actuada por una fuerza constante **F**,

donde $\mathbf{F} = (50\mathbf{i}_1 + 25\mathbf{i}_2 + 30\mathbf{i}_3)$ newtons. Inicialmente la partícula tiene una velocidad de 36 m/s a lo largo de la línea cuyas razones de dirección son 4 : 4 : 7. Hallar la posición y la velocidad de la partícula en cualquier instante t.

2. Una partícula de 5 kg masa se proyecta desde el punto de origen con una velocidad de 28 m/s a lo largo de la línea cuyas razones de dirección son 2 : 3 : 6. La partícula es actuada mediante una fuerza F, cuyo valor en el instante t viene dado por $\mathbf{F} = \{(10 \text{ sen } t)\ \mathbf{i}_1 - 320\mathbf{i}_2\}$ newtons. Hallar la velocidad y la posición de la partícula en el instante t.

3. Una partícula se proyecta desde un punto O con una velocidad de 88 m/s a lo largo de la línea cuyas razones de dirección son 2 : 6 : 9. La partícula está sometida a una aceleración cuyo valor en el instante t es $\{t\mathbf{i}_1 + (\text{sen } t)\ \mathbf{i}_2 - 32\mathbf{i}_3\}$ m/s^2. Hallar la velocidad y la posición de la partícula en el instante t.

4. Se proyecta una partícula desde el origen con una velocidad de 91 m/s a lo largo de la línea que forma un ángulo $\text{tg}^{-1}\ 5/12$ con la vertical. Si la partícula se mueve libremente por gravedad, hallar su velocidad y posición en cualquier instante t, y demostrar que su trayectoria es una curva en un plano vertical. Hallar también el tiempo en el que la partícula alcanza de nuevo el plano horizontal que pasa por O y su distancia de O en ese instante.

5. Se poryecta una partícula con una velocidad de 49 m/s en una dirección que forma un ángulo de $\pi/6$ con la horizontal. Hallar, (i) el tiempo en el que la partícula alcanza el plano horizontal que pasa por el punto de proyección, (11) la distancia en ese momento desde el punto de proyección, (iii) la mayor altura conseguida durante su desplazamiento.

6. Se dispara un misil horizontalmente desde una altura de 16.000 m, con una velocidad de 7.000 m/s. Hallar la distancia horizontal desde el punto de disparo hasta el punto donde el misil cae al suelo.

7. Demostrar que la velocidad relativa de dos partículas que se mueven en cualquier dirección por la aceleración de la gravedad, es constante.

N.B. *La velocidad de un cuerpo A, con relación a otro cuerpo B, es la velocidad que A manifiesta tener para un observador que se desplaza con B. Así si* $\mathbf{V}_A$ *y* $\mathbf{V}_B$ *son las velocidades de A, B respectivamente, la velocidad de A con relación a B es* $\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B$, *mientras que la velocidad de B con relación a A es* $\mathbf{V}_B - \mathbf{V}_A$.

8. Se proyecta una partícula desde un punto A en dirección $\overline{AB}$ con la velocidad u, mientras que una segunda partícula se dispara simultáneamente desde B en dirección $\overline{BA}$ con una velocidad v. Demostrar que las partículas llegarán a colisionar y que el punto de colisión está verticalmente bajo C, punto en AB tal que $AC : CB = \mathbf{u} : \mathbf{v}$.

9. Una pelota rebasa justamente dos vallas de la misma altura h, que están a distancias d_1 y d_2 del punto de lanzamiento. Demostrar que si α es el ángulo de lanzamiento,

$$tg\ \alpha = h(d_1 + d_2)/d_1 d_2.$$

10. Se lanza una piedra horizontalmente desde la cúspide de una torre de 80 m de altura con una velocidad de 40 m/s. En el mismo instante se lanza otra piedra desde el pie de la torre con una velocidad de 80 m/s en una dirección inclinada que forma con la horizontal un ángulo de $\pi/3$. Las dos piedras se mueven en el mismo plano vertical. Demostrar que las piedras se chocan y hallar el vector de posición de su punto de colisión.

CAPITULO V

§5.1.

Si sobre una partícula actúa una fuerza dirigida hacia (o desde) un punto fijo O, dicha fuerza se denomina *fuerza central* y el punto fijo O se denomina *centro de fuerza.* La trayectoria de la partícula se denomina *órbita.*

§5.2.

Imaginemos que en un instante t, una partícula de masa m está en el punto P, cuyo vector de posición respecto al origen O es $\mathbf{r}$. Supongamos que sobre la partícula actúa una fuerza $\mathbf{F}$ en la dirección $\overrightarrow{OP}$. Entonces si $\mathbf{H}$ es el momento angular de la partícula respecto de O,

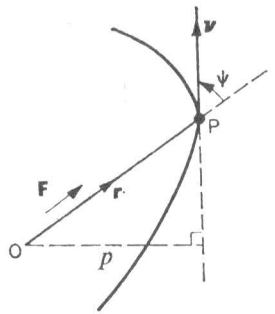


Fig. 29

$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times (m\dot{\mathbf{r}})$$

por tanto
$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times (m\dot{\mathbf{r}}) + \mathbf{r} \times (m\ddot{\mathbf{r}})$$
$$= 0 + \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$
$$= 0, \text{ ya que } \mathbf{r}, \mathbf{F} \text{ están en la misma dirección,}$$

i.e. $\mathbf{H}$ es constante.

Como $\mathbf{H}$ es un vector constante, su dirección es constante y dado que también $\mathbf{H} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}$, $\mathbf{H}$ es perpendicular a $\mathbf{r}$. De aquí que el vector $\mathbf{r}$ pasa por el punto fijo O y es siempre perpendicular a una dirección fija; es decir que $\mathbf{r}$ se mueve en un plano fijo y la trayectoria de la partícula es una curva plana. De donde la órbita de una partícula que se desplaza bajo la acción de una fuerza central es una curva plana.

Supongamos que $\mathbf{H} = m\mathbf{h}$, donde $\mathbf{h}$ es el momento angular por unidad de masa de la partícula respecto de O. Entonces, como $\mathbf{H}$ es un vector constante, y m un escalar constante, $\mathbf{h}$ es un vector constante también.

Como
$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}},$$
entonces
$$m\mathbf{h} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}},$$
por tanto
$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}. \qquad \text{(I)}$$

Utilizando la notación del capítulo IV, la ecuación (1) puede escribirse

$$\mathbf{h} = r\mathbf{l}_1 \times (\dot{r}\mathbf{l}_1 + r\dot{\theta}\mathbf{l}_2)$$

i.e.
$$\mathbf{h} = r^2\dot{\theta}\mathbf{l}_3, \qquad \text{(II)}$$

ya que
$$\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_1 = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 = \mathbf{l}_3.$$

Pero $\mathbf{h}$ es un vector constante, de aquí que $r^2\dot{\theta}$ sea constante en todo su movimiento y $\mathbf{l}_3$ esté en una dirección constante, normal al plano de la órbita de la partícula.

Supongamos que en el instante t, cuando la partícula está en P, la perpendicular desde O a la tangente a la órbita en P tenga una longitud p. Entonces $\mathbf{h} = pv\mathbf{l}_3$, donde $\mathbf{v}$ es la velocidad de la partícula en P.

De donde:

$$h = pv = r^2\dot{\theta} = \text{constante} \qquad \text{(III)}$$

§5.3.

Sea $\mathbf{A}$ el vector área engendrado en el instante t por el radio OP. Entonces si $\delta\mathbf{A}$, $\delta\mathbf{r}$ son pequeños incrementos en $\mathbf{A}$, $\mathbf{r}$ correspondientes a una pequeña rotación $\delta\theta$ de OP, en el pequeño intervalo de tiempo δt,

$$\delta\mathbf{A} = (\tfrac{1}{2}r^2\delta\theta)\mathbf{l}_3$$

por tanto

$$\frac{\delta\mathbf{A}}{\delta t} = \tfrac{1}{2}r^2\frac{\delta\theta}{\delta t}\mathbf{l}_3.$$

En el límite, como $\delta t \to 0$,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \tfrac{1}{2}r^2\dot{\theta}\mathbf{l}_3 = \tfrac{1}{2}\mathbf{h},$$

i.e.

$$\left|\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right| = \tfrac{1}{2}h, \quad \text{que es constante} \qquad \text{(IV)}$$

Este hecho fue puesto de manifiesto por Kepler en sus observaciones astronómicas del movimiento de los planetas antes de que se demostrara matemáticamente, y quedó establecido por el mismo Kepler, como su segunda ley del movimiento planetario, de la siguiente forma: *"Las áreas descritas por los radios trazados desde el sol a un planeta, son proporcionales a los tiempos empleados en describirlas"*, o de forma más corta: *El radio que une el sol* (demostrado que éste es un centro de fuerza) *con un planeta describe áreas iguales en tiempos iguales.*

§5.4. La Ley Cuadrática inversa *(Primer Método)*

Supongamos que en un tiempo cualquiera t, una partícula se encuentra en el punto P, cuyo vector de posición respecto al punto de origen O es r. Supongamos que la partícula se ve atraída hacia O

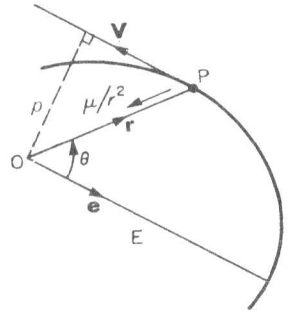


Fig. 30

por una fuerza de magnitud μ/r^2 por unidad de masa de la partícula, donde μ es un escalar constante. Entonces, si m es la masa de la partícula,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu m}{r^2}\mathbf{l}_1, \qquad (1)$$

i.e.

$$\frac{1}{\mu}\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{1}{r^2}\mathbf{l}_1 \qquad (2)$$

De aquí que si $\mathbf{h}$ es el momento angular constante por unidad de masa de la partícula,

$$\frac{1}{\mu}\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = -\frac{1}{r^2}\mathbf{l}_1 \times \mathbf{h},$$

i.e.
$$\frac{1}{\mu}\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = -\frac{1}{r^2}\mathbf{l}_1 \times r^2\dot{\theta}\mathbf{l}_3$$

donde $\dot{\theta}$ es la velocidad angular de OP,

i.e.
$$\frac{1}{\mu}\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \dot{\theta}\mathbf{l}_2,$$
$$= \frac{d\mathbf{l}_1}{dt}.$$

Integrando respecto a t, resulta

$$\frac{1}{\mu}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{e}, \tag{3}$$

donde $\mathbf{e}$ es un vector constante.

De (3),

$$\mathbf{r} \cdot \left\{\frac{1}{\mu}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}\right\} = \mathbf{r} \cdot \{\mathbf{l}_1 + \mathbf{e}\}$$

i.e.
$$\frac{1}{\mu}\{\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h})\} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}_1 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}$$

i.e.
$$\frac{1}{\mu}\{(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{h}\} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}_1 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}$$

i.e.
$$\frac{1}{\mu}(\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}_1 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}$$

i.e.
$$\frac{1}{\mu}h^2 = r + re\cos\theta, \tag{4}$$

donde θ es el ángulo entre $\overline{OP}$ y el vector constante $\mathbf{e}$.

La ecuación (4) puede escribirse:

$$\frac{h^2/\mu}{r} = 1 + e\cos\theta, \tag{5}$$

que es la ecuación polar de una cónica que tiene a O como foco, e como excentricidad y su eje mayor en la dirección de $\mathbf{e}$.

De la ecuación (5) el semi-lado recto es h^2/μ. La cónica es una elípse, parábola o hipérbola según $e < 1, e = 1, e > 1$.

Ejemplo 1. *Una partícula es atraída hacia un punto fijo O por una fuerza μ/OP^2 por unidad de masa, donde P es la posición de la partícula en el instante t. La partícula se proyecta desde un punto A, donde $OA = a$, con una velocidad $(\mu/2a)^{1/2}$ según una dirección que forma un ángulo $\pi/4$ con $\overline{OA}$. Hallar la excentricidad de la órbita y el período de la partícula en su órbita.*

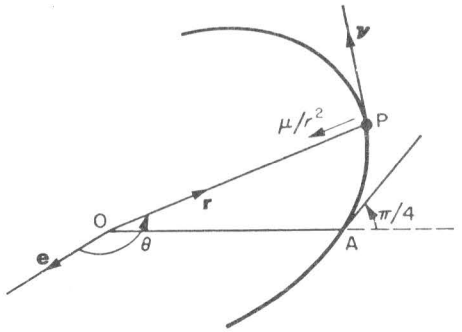


Fig. 31

Sea $\mathbf{r}$ el vector de posición de la partícula, referido a O, en cualquier instante t y sea m su masa. Sea $\mathbf{l}_1$ el vector unitario con dirección $\overline{OP}$, y $\mathbf{l}_3$ el vector transversal unitario. Sea $\mathbf{l}_3$ el vector unitario perpendicular a $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ de modo que $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$ formen un sistema de vectores unitarios perpendiculares entre sí, dextrógiro. Sea $\mathbf{h}$ el momento angular por unidad de masa de la partícula con relación a O. Entonces $\mathbf{h}$ es un vector constante, de tal modo que

$$\mathbf{h} = r^2\dot{\theta}\mathbf{l}_3 = \left(a \sin \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\mu}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{l}_3$$

donde $\dot{\theta}$ es la velocidad angular de OP,

i.e. $$\mathbf{h} = r^2\dot{\theta}\mathbf{l}_3 = \tfrac{1}{2}(a\mu)^{\frac{1}{2}}\mathbf{l}_3 \tag{1}$$

Considerando la fuerza que actúa sobre la partícula,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\, m\, \mathbf{l}_1, \tag{2}$$

i.e. $$\frac{1}{\mu}\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{1}{r^2}\mathbf{l}_1. \tag{3}$$

Por tanto
$$\frac{1}{\mu}\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = -\frac{1}{r^2}\mathbf{l}_1 \times \mathbf{h}$$
$$\frac{1}{\mu}\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = -\frac{1}{r^2}\mathbf{l}_1 \times r^2\dot{\theta}\,\mathbf{l}_3,$$
$$= -\dot{\theta}\,\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_3,$$
$$= \dot{\theta}\,\mathbf{l}_2$$

por tanto $$\frac{1}{\mu}\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \frac{d\mathbf{l}_1}{dt}. \tag{4}$$

Integrando con respecto a t, la ecuación (4) resulta

$$\frac{1}{\mu}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{e}, \tag{5}$$

donde $\mathbf{e}$ es un vector constante.

Sean $\mathbf{l}_{11}, \mathbf{l}_{21}, \mathbf{l}_{31}$, los valores iniciales de los vectores unitarios $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$; entonces si $\mathbf{r}_1$ es el valor inicial de $\mathbf{r}$,

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \left(\frac{\mu}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{l}_{11} + \left(\frac{\mu}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{l}_{21},$$

i.e. $$\dot{\mathbf{r}}_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{a}\right)^{\frac{1}{2}}(\mathbf{l}_{11} + \mathbf{l}_{21}).$$

Sustituyendo en la ecuación (5)

$$\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\mu}{a}\right)^{\frac{1}{2}}(\mathbf{l}_{11} + \mathbf{l}_{21}) \times (\tfrac{1}{2})\,(a\mu)^{\frac{1}{2}}\mathbf{l}_{31} = \mathbf{l}_{11} + \mathbf{e}$$

i.e. $$\mathbf{e} = -\tfrac{1}{4}\mathbf{l}_{21} + \tfrac{1}{4}\mathbf{l}_{11} - \mathbf{l}_{11}$$

i.e. $$\mathbf{e} = -\tfrac{3}{4}\mathbf{l}_{11} - \tfrac{1}{4}\mathbf{l}_{21}, \tag{6}$$

y $$e = \frac{\sqrt{10}}{4} \tag{7}$$

De la ecuación (5)

$$\mathbf{r} \cdot \left(\frac{1}{\mu}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}\right) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}_1 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}$$

i.e. $$\frac{1}{\mu}\{\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h})\} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}_1 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}$$

i.e. $$\frac{1}{\mu}\{(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{h}\} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}_1 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}$$

i.e. $$\frac{1}{\mu}(\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}_1 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{e},$$

i.e. $$\frac{h^2}{\mu} = r + re\cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{r}$ y el vector constante $\mathbf{e}$,

i.e. $$\frac{h^2}{\mu} = r(1 + e\cos\theta) \tag{8}$$

que es la ecuación polar de un cono que tiene O como foco, e como excentricidad, y h^2/μ como semi-lado recto, estando el eje mayor del cono en dirección del vector $\mathbf{e}$. Como $e < 1$ ($e = \sqrt{10}/4$), la ecuación (8) representa una elipse de excentricidad $\sqrt{10}/4$.

Si α, β son los semiejes mayor y menor de esta elipse, entonces

$$\frac{h^2}{\mu} = a(1 - e^2)$$

i.e. $$\frac{a\mu}{4\mu} = a\left(1 - \frac{10}{16}\right)$$

i.e. $$a = \frac{2a}{3}$$

y $$\beta^2 = \frac{4a^2}{9}\left(1 - \frac{10}{16}\right)$$

i.e. $$\beta = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Como el valor de las áreas descritas por OP es constante e igual a $1/2\ h$, es decir $1/4\ \sqrt{a\mu}$, y el área de la elipse es $\pi\alpha\beta$, entonces el tiempo T que necesita la partícula para recorrer completamente su órbita viene dado por

$$T = \frac{\pi\alpha\beta}{h/2},$$

$$= \pi\left(\frac{2a}{3}\right)\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{(a\mu)}}\right),$$

i.e. $$T = \frac{4\pi}{9}\sqrt{\left(\frac{6a^3}{\mu}\right)}$$

§5.5. Ley Cuadrática inversa *(Segundo Método)*

La ecuación (1) del párrafo 5.4 puede escribirse

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\mathbf{l}_1. \qquad (1)$$

De donde $$2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\left(\frac{\mu}{r^2}\right) 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{l}_1,$$

i.e. $$2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{2\mu}{r^2}(\dot{r}\mathbf{l}_1 + r\dot{\theta}\mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{l}_1,$$

i.e. $$2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{2\mu}{r^2}\dot{r}. \qquad (2)$$

Integrando con respecto a t, la ecuación (2) resulta:

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{2\mu}{r} + c, \qquad (3)$$

donde c es una constante escalar. Si $\mathbf{v}\ (=\dot{\mathbf{r}})$ es la velocidad de la partícula en el instante t, la ecuación (3) puede escribirse

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + c,$$

i.e. $$\frac{h^2}{p^2} = \frac{2\mu}{r} + c,$$

i.e. $$\frac{h^2/c}{p^2} = \frac{2\mu/c}{r} + 1,$$

que es la (p, r) ecuación de una cónica.

Ejemplo 2. Aplicando este método al ejemplo del párrafo 5.4, la ecuación (1) del párrafo 5.4 da

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\mathbf{l}_1, \qquad (1)$$

por tanto $$2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2} 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{l}_1$$

$$2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{2\mu}{r^2}\dot{r}. \qquad (2)$$

Integrando con respecto a t, la ecuación (2) resulta:

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{2\mu}{r} + c,$$

donde c es una constante escalar,

i.e. $$v^2 = \frac{2\mu}{r} + c, \qquad (3)$$

donde $$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}.$$

Pero inicialmente $v = \sqrt{\left(\frac{\mu}{2a}\right)}$ and $r = a$,

por consiguiente $$\frac{\mu}{2a} = \frac{2\mu}{a} + c,$$

por tanto $$c = -\frac{3\mu}{2a}.$$

De aquí que la ecuación (3) se puede escribir

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{3\mu}{2a}. \qquad (4)$$

Como $pv = h = 1/2\sqrt{(a\mu)}$, la ecuación (4) se puede escribir

$$\frac{a\mu}{4p^2} = \frac{2\mu}{r} - \frac{3\mu}{2a}$$

i.e. $$\frac{a^2/6}{p^2} = \frac{4a/3}{r} - 1$$

que es la (p, r) ecuación de una elipse cuyo semieje mayor α, y cuyo semieje menor β, vienen dados por

$$\alpha = \frac{2a}{3}, \qquad \beta = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

De donde la excentricidad e viene dada por

$$\beta^2 = \alpha^2(1 - e^2);$$

i.e. $$\frac{a^2}{6} = \frac{4a^2}{9}(1 - e^2);$$

i.e. $$1 - e^2 = \frac{3}{8};$$

por tanto $$e^2 = \frac{5}{8};$$

y $$e = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

El período T se obtiene de la relación

$$T = \frac{2\pi\alpha\beta}{h}$$

como en el § 5.4.

§5.6. Otras Leyes de Fuerza distintas de la Ley Cuadrática Inversa

Un examen de los métodos demostrados en los párrafos 5.4 y 5.5 viene a demostrar que el método del párrafo 5.4 puede utilizarse correctamente sólo cuando la ley de la fuerza es la ley cuadrática inversa, mientras que el método del párrafo 5.5 tiene una aplicación general más amplia, pero tiene la desventaja de dar la ecuación de la órbita en la forma (p, r) que es menos familiar que la ecuación polar proporcionada por el método del párrafo 5.4.

Un ejemplo sería más que suficiente para poner de manifiesto el método del párrafo 5.5 cuando la ley de fuerza no es la ley cuadrática inversa.

Ejemplo 3. *Una partícula es atraída hacia un punto fijo O por una fuerza* $(\mu/r^2) + (\mu a/4r^3)$ *por unidad de masa, donde r es la distancia de la partícula a O en cualquier instante t. Se proyecta la partícula desde el punto A, cuya distancia a O es a, con una velocidad* $\sqrt{\mu/3a}$ *perpendicular a OA. Hallar la (p, r) ecuación de la órbita de la partícula y demostrar que su distancia a O nunca es mayor que a y nunca es menor que a/23.*

Supongamos que la partícula está en un punto P en cualquier instante t y que el vector de posición de P respecto a O es $\mathbf{r}$. Entonces con la notación de costumbre

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu\left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{4r^3}\right)\mathbf{l}_1, \tag{1}$$

por tanto $$2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -2\mu\left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{4r^3}\right)\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{l}_1$$

i.e. $$2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -2\mu\left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{4r^3}\right)(\dot{r}\mathbf{l}_1 + r\dot{\theta}\mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{l}_1,$$

donde $\dot{\theta}$ es la velocidad angular de OP,

i.e. $$2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -2\mu\left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{4r^3}\right)\dot{r}. \tag{2}$$

Integrando la ecuación (2) resulta

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu a}{4r^2} + c,$$

donde c es una constante escalar. Si $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$,

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu a}{4r^2} + c. \tag{3}$$

Pero $v = \sqrt{(\mu/3a)}$ donde $r = a$

entonces $$c = \frac{\mu}{3a} - \frac{2\mu}{a} - \frac{\mu}{4a},$$

i.e. $$c = -\frac{23\mu}{12a}.$$

Luego la ecuación (3) se puede escribir

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu a}{4r^2} - \frac{23\mu}{12a}. \tag{4}$$

Si $\mathbf{h}$ es el momento angular por unidad de masa de la partícula respecto a O, y p es la longitud de la perpendicular desde O a la tangente en P a la trayectoria de la partícula, entonces

$$pv = h = a\sqrt{\left(\frac{\mu}{3a}\right)}$$

De donde la ecuación (4) se puede escribir

$$\frac{\mu a}{3p^2} = \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu a}{4r^2} - \frac{23\mu}{12a}$$

i.e. $$\frac{a}{3p^2} = \frac{2}{r} + \frac{a}{4r^2} - \frac{23}{12a} \tag{5}$$

De la ecuación (5) cuando $p \leqslant r$,

$$\frac{a}{3r^2} \leqslant \frac{2}{r} + \frac{a}{4r^2} - \frac{23}{12a}$$

i.e. $$4a^2 \leqslant 24ar + 3a^2 - 23r^2$$

i.e. $$a^2 - 24ar + 23r^2 \leqslant 0$$

i.e. $$(a - r)(a - 23r) \leqslant 0$$

i.e. $$\frac{a}{23} \leqslant r \leqslant a.$$

Por tanto la distancia r de la partícula a O nunca es mayor que a y nunca es menor que a/23.

Ejemplos V

1. Una partícula de masa m se ve atraída hacia un punto fijo S por una fuerza $3mcu^2/r^2$ donde r es la distancia de la partícula a S en cualquier instante t, y c, u son constantes. Inicialmente la partícula se proyecta desde un punto C con una velocidad u, en dirección inclinada a $\overline{SC}$, con un ángulo $\pi/3$, siendo c la distancia SC. Hallar la excentricidad de la órbita de la partícula y determinar si es una elipse, parábola o hipérbola.

2. Una partícula se ve atraída hacia un punto fijo O por una fuerza μ/OP^2 por unidad de masa, donde P es la posición de la partícula en el instante t. Escribir la ecuación vectorial del movimiento de la partícula y demostrar que su trayectoria es una cónica con un foco en O.

Si la partícula se proyecta desde un punto A, donde $OA = a$, con velocidad $\sqrt{(\mu/a)}$ en una dirección que forma un ángulo de $\pi/4$ con OA, hallar la excentricidad de la órbita y el período de la partícula en su órbita.

3. Una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza central que atrae a la partícula hacia un punto O con una fuerza inversamente proporcional a su distancia a O, siendo la fuerza de atracción de 32 N por unidad de masa cuando la distancia es de 2 m. Si la partícula se proyecta desde un punto A en una dirección perpendicular a OA, con una velocidad de 16 m/s, siendo OA un metro, determinar la ecuación de la órbita.

4. Una partícula de masa M se mueve bajo la acción de una fuerza central centrípeta $\mu M/r^2$. Demostrar que la trayectoria de la partícula es una sección cónica cuyo semi-lado recto es h^2/μ, donde Mh es el momento angular de la partícula, relativo al centro de atracción.

La partícula inicialmente se mueve en una órbita circular. Demostrar que si se ve instantáneamente disminuida por una fracción c con relación a su valor inicial, entonces, en el movimiento inmediato, la razón de la distancia de la partícula desde el centro de la fuerza en el perihelio, con relación a su distancia en el afelio es $(1 - 2c) : 1$.

N.B. *En el movimiento planetario, el perihelio es el punto de la órbita que está más cerca del centro de atracción y el afelio es el punto de la órbita que está más alejado del mismo.*

5. Una partícula P se proyecta con una velocidad V, desde un punto a una distancia R de un centro de fuerza O, y se ve atraída hacia O por una fuerza μ/OP^2 por unidad de masa. Demostrar que la trayectoria de la partícula es una elipse, parábola o hipérbola según que V sea menor, igual o mayor que $2\mu/R$.

Dos partículas de masas M y m respectivamente, que describen órbitas parabólicas coplanarias con relación a un centro de fuerza situado en el foco común, chocan en ángulo recto y quedan unidas a la distancia R del centro de fuerza. Demostrar que la trayecotria de la partícula compuesta es una elipse cuyo eje mayor tiene una longitud de $R\,(M + m)^2/2Mm$.

6. Una partícula P de masa unidad es atraída hacia un punto fijo S por una fuerza de magnitud μ/SP^2. La partícula se proyecta desde un punto P_0 con velocidad u (no en la recta SP_0). Demostrar que la trayectoria de la partícula es una cónica que tiene S como foco. Hallar las condiciones en que la trayectoria fuese: (i) elíptica, (ii) hiperbólica, (iii) parabólica. Demostrar que si la trayectoria fuese elíptica, el período sería

$$2\pi\mu\left\{\frac{SP_o}{2\mu - u^2SP_o}\right\}^{3/2}$$

7. Hallar las expresiones para las componentes radiales y transversales de la velocidad y aceleración de la partícula P que se mueve en un plano. P tiene como velocidades u, v de magnitudes constantes; u en una dirección fija y v perpendicular a OP, donde O es un punto fijo. Demostrar que la aceleración de la partícula está siempre orientada hacia O y varía inversamente al cuadrado de la distancia a O. Hallar la excentricidad de la órbita en función de u, v.

8. Una partícula describe una elipse, sometida a una atracción μr por unidad de masa, con dirección a un punto fijo O. Demostrar que, con la notación usual,

$$v^2 = \mu(a^2 + b^2 - r^2), \quad h = ab\sqrt{\mu}$$

Una partícula igual, sometida a la misma fuerza de atracción, se proyecta desde O con velocidad $b\sqrt{11\mu}$, a lo largo del eje mayor de la elipse. Las dos partículas chocan y se fusionan al extremo del eje mayor. Si $a = 2b$, demostrar que la órbita de la partícula compuesta es una elipse cuyos ejes son $2b\,(\sqrt{2} \pm 1)$.

9. Se lanza un misil P desde un punto A en la superficie de la tierra, con una velocidad de $\sqrt{(2gd)}$, suponiendo que la tierra sea esférica con radio c $(c > d)$ y centro O. Se sobreentiende que el misil es atraído hacia O por una fuerza gc^2/r^2 por unidad de masa, donde $OP = r$. Demostrar que la trayectoria de P es una elipse con el foco en O y que la velocidad v de P viene dada por

$$v^2 = 2g\left(d - c + \frac{c^2}{r}\right).$$

Demostrar que el lugar geométrico del segundo foco S, para todas las trayectorias en las cuales la partícula parte de A, en el mismo plano vertical, con la misma velocidad, es una circunferencia con centro A y radio $cd/(c - d)$.

10. Una partícula P describe una elipse, sometida a una atracción hacia un foco S. Demostrar que la atracción varía inversamente a SP^2. Demostrar también que la Energía Cinética de la partícula es proporcional a $\{(2/SP) - (1/a)\}$ donde a es el semieje mayor de la elipse. Si las velocidades mayor y menor de la partícula son v_1, v_2 respectivamente, demostrar que la excentricidad de la trayectoria es $(v_1 - v_2)/(v_1 + v_2)$.

11. Una partícula P se mueve en el plano de los ejes rectangulares OX, OY por una atracción $n^2 OP$ por unidad de masa, dirigida hacia O. Cuando la partícula se encuentra en el punto $(a, 0)$ su velocidad es u en dirección OY. Demostrar que la trayectoria de la partícula es una elipse. Hallar la velocidad de la partícula en el instante t, después de partir de $(a, 0)$ y también el período de la partícula en su órbita.

12. Una partícula P se mueve bajo la acción de una fuerza central μ/r^2 por unidad de masa, dirigida hacia un punto fijo S donde $SP = r$. Inicialmente la partícula se encuentra a una distancia R de S y tiene una velocidad V según una dirección que forma un ángulo ϕ con SP. Si $V^2R = 2a\mu$, demostrar que la trayectoria de P es una cónica con un foco en S, semi-lado recto $2aR \operatorname{sen}^2 \phi$ y excentricidad e, donde $e^2 = 1 - 4a\,(1 - a) \operatorname{sen}^2 \phi$.

13. Una partícula es atraída hacia un punto fijo O por fuerza que varía inversamente al cuadrado de la distancia de la partícula a O. Probar que la órbita es una cónica con un foco en O y, con la notación usual, de semi-lado recto h^2/μ. Demostrar también que la velocidad v viene dada por

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu(e^2 - 1)}{l}$$

donde l es el semi-lado recto. Cuando describe una órbita circular con velocidad U, la partícula se divide en dos partes iguales. La velocidad incial de la separación de las dos partes se encuentra en la línea de la velocidad anterior a la explosión y tiene una magnitud $2V$. Demostrar que si $V < (\sqrt{2} - 1)\,U$, ambas partes describen posteriormente órbitas elípticas.

14. (*a*) Si $\mathbf{r}$ es cualquier función vectorial de t, probar que

(i) $\quad r\dfrac{dr}{dt} = \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}$;

(ii) $\quad r^3 \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$;

(iii) $\quad r^3 \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mathbf{r}}{r}\right) = -\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})$.

(*b*) Un planeta de masa m es atraído por el sol con una fuerza de magnitud MmG/r^2 donde M es la masa del sol, G es una constante y r es la distancia del planeta al sol. Escribir la ecuación del movimiento del planeta respecto al sol el cual puede considerarse como fijo, y demostrar que la velocidad v del planeta viene dada por

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG}{r} = E,$$

donde E es una constante. Cuando el planeta se encuentre a una distancia $2a$ del sol su velocidad es V y cuando se encuentre a la mitad de esta distancia, su velocidad es $2V$. Demostrar que la masa del sol es $3V^2a/G$.

15. Una partícula de masa M tiene como vector de posición r respecto a un punto fijo O y sobre ella actúa una fuerza $-M\mu\,(r)^{-3}\,\mathbf{r}$. Inicialmente se parte de una velocidad V de modo que $V^2 < 2\mu/a$ donde a es el vector de posición de la situación inicial de la partícula. Demostrar que la trayectoria de la partícula es una elipse y que la velocidad v de la partícula en el instante t satisface la relación

$$\mathbf{h} \times \mathbf{v} = -\frac{\mu}{r}\mathbf{r} + \mu e \mathbf{e}_1,$$

donde $M\mathbf{h}$ es el momento angular relativo a O, e la excentricidad de la elipse, $\mathbf{e}_1$ el vector unitario en la dirección del eje mayor. De aquí calculando $h \times \times (h \times v)$ o al contrario, demostrar que v puede expresarse como la suma de un vector de magnitud constante perpendicular a r y de un vector constante perpendicular a $\mathbf{e}_1$.

16. Una partícula se mueve en una órbita elíptica de eje mayor $2a$ por la atracción central μ/r^2 por unidad de masa. Demostrar que la magnitud de su velocidad v viene dada por

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

donde la relación $h^2 = \mu l$, con la notación de costumbre, puede utilizarse.

Un satélite se mueve uniformemente en una órbita circular de radio $4c$ con relación al centro de la tierra O, siendo el radio de la tierra c. La velocidad del satélite se ve reducida repentinamente, permaneciendo su dirección inalterable, de modo que continúa en una órbita elíptica tal que su menor distancia de O en el movimiento inmediato es $2c$. Demostrar que la velocidad debe reducirse según la razón $\sqrt{2} : \sqrt{3}$. Demostrar también que el tiempo que le lleva al satélite alcanzar esta distancia $2c$ desde O es $\mu\sqrt{27c/g}$ y hallar su velocidad en este punto en función de c, g, siendo g la aceleración a la gravedad en la superficie de la tierra.

CAPITULO VI

§6.1.

Será útil emplear la notación "el punto A (**a**)" para indicar "el punto A cuyo vector de posición referido al origen O, es **a**".

§6.2. Ecuación de una línea recta que pasa por un punto dado en una dirección dada

Sea O el origen y P (**r**) cualquier punto sobre la recta AB trazada por A (**a**) en dirección del vector **b**. Entonces existe un número t, que depende de la posición de P, de modo que $\overline{AP} = t\mathbf{b}$.

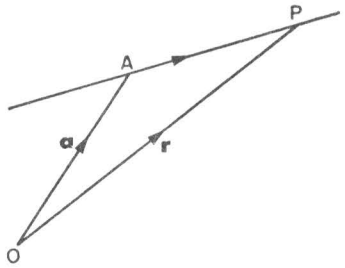


Fig. 32

Entonces $$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP},$$

i.e. $$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}. \qquad \text{(I)}$$

Para cualquier punto P en la recta AB existe un único valor de t; también para cualquier valor de t existe un único punto P en la recta AB. Suponiendo que t_1 es un valor particular de t, entonces el punto P_1 determinado por la ecuación (I) tiene un vector de posición $\mathbf{r}_1$ donde

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{a} + t_1\mathbf{b},$$

i.e. $$\overline{OP_1} = \overline{OA} + t_1\mathbf{b}$$

i.e. $$\overline{OP_1} - \overline{OA} = t_1\mathbf{b},$$

i.e. $$\overline{AP_1} = t_1\mathbf{b}.$$

Por tanto, la recta AP_1 pasa por A y es paralela a **b**. Es decir, la recta AP_1 coincide con AB y por consiguiente P_1 está en AB. Así pues, cualquier punto P, siempre que $\overline{AP} = t\mathbf{b}$, cuyo parámetro t satisfaga la ecuación (I), está en AB. De aquí que la ecuación (I) sea la ecuación de la recta que pasa por A en la dirección de **b**.

§6.3. Ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados

Sea O el origen y A (**a**), B (**b**) dos puntos dados. Sea P (**r**) un punto cualquiera sobre la recta AB. Entonces, para cualquier posición de P en AB debe existir un número t tal que $AP : AB = t : 1$.

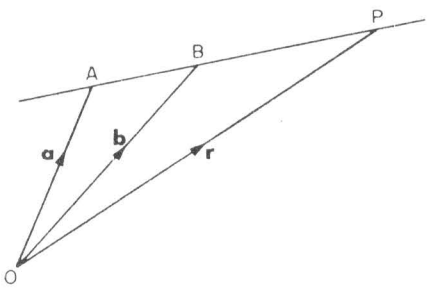


Fig. 33

Por tanto $\overline{AP} = t\overline{AB}$,

i.e. $\mathbf{r} - \mathbf{a} = t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$

i.e. $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ (II)

o bien $\mathbf{r} = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$. (III)

De aquí que el parámetro t de cualquier punto P en AB, donde $AP : AB = t : 1$, debe satisfacer las ecuaciones (II), (III). Con un argumento similar al del párrafo 6.2 se puede demostrar que si P es un punto tal que $AP : AB = t : 1$, y el parámetro t satisface la ecuación (II), entonces P está en AB.

§6.4. Ecuación de un plano que pasa por un punto dado y es paralelo a dos vectores dados

Sea O el origen y Π el plano paralelo a dos vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, que contienen un punto dado C $(\mathbf{c})$. Entonces, las rectas CA, CB pueden trazarse sobre el plano Π de modo que $CA = \mathbf{a}$ y $CB = \mathbf{b}$.

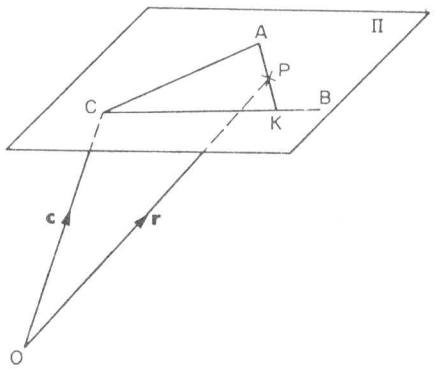


Fig. 34

Sea K $(\mathbf{k})$ un punto arbitrario en CB de modo que $\overline{CK} = \lambda\mathbf{b}$. Entonces $\overline{OA} = \mathbf{c} + \mathbf{a}$ y $\overline{OK} = \mathbf{c} + \lambda\mathbf{b}$. Si P $(\mathbf{r})$ es un punto cualquiera en la recta AK, debe existir un número μ tal que

$$\mathbf{r} = (\mathbf{c} + \mathbf{a}) + \mu\{(\mathbf{c} + \lambda\mathbf{b}) - (\mathbf{c} + \mathbf{a})\}$$

de la ecuación (II) de 6.3.,

i.e. $\mathbf{r} = \mathbf{c} + \mathbf{a} + \mu\{\lambda\mathbf{b} - \mathbf{a}\}$,

i.e. $\mathbf{r} = \mathbf{c} + (1 - \mu)\mathbf{a} + \lambda\mu\mathbf{b}$.

Eligiendo oportunamente λ y μ, puede lograrse que el punto P tome cualquier posición en el plano Π. De aquí que la ecuación

$$\mathbf{r} = \mathbf{c} + (1 - \mu)\mathbf{a} + \lambda\mu\mathbf{b}$$

dé el vector de posición de un punto cualquiera P del plano Π. Escribiendo s en lugar de $(1 - \mu)$ y t en lugar de $\lambda\mu$, la ecuación del plano Π puede representarse de la forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{c} + s\mathbf{a} + t\mathbf{b}. \quad \text{(IV)}$$

Mediante un argumento semejante al del párrafo 6.2 se puede demostrar que si un par de valores de s y t se sustituyen en la ecuación (IV), el punto así definido está en el plano que pasa por A paralelo a los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

§6.5. Ecuación de un plano que contiene tres puntos dados

Sea O el origen y A $(\mathbf{a})$, B $(\mathbf{b})$, C $(\mathbf{c})$ tres punto dados que definen al plano Π. Entonces $\overline{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ y $\overline{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$. Entonces Π es el plano que contiene al punto A $(\mathbf{a})$ y es paralelo a los vectores $(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ y $(\mathbf{c} - \mathbf{a})$. Según el párrafo 6.4 la ecuación del plano Π es

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + s(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + t(\mathbf{c} - \mathbf{a}),$$

i.e. $$\mathbf{r} = (1 - s - t)\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}, \qquad \text{(V)}$$

donde s, t son parámetros.

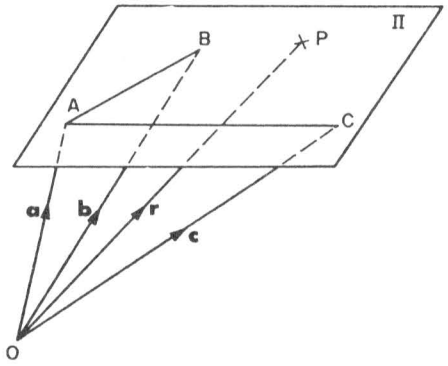


Fig. 35

§6.6. Ecuación de un plano que pasa por un punto dado y es normal a una dirección

Sea O el origen y A **(a)** el punto dado. Sea **n** el vector unitario en la dirección dada y p la longitud de la perpendicular de O al plano que pasa por A, normal a **n**. Sea N el pie de la perpendicular de O a Π. Entonces el vector de posición de N es p**n**. Si P **(r)** es un punto cualquiera del plano Π, $\overline{AP}$ es perpendicular a $\overline{ON}$,

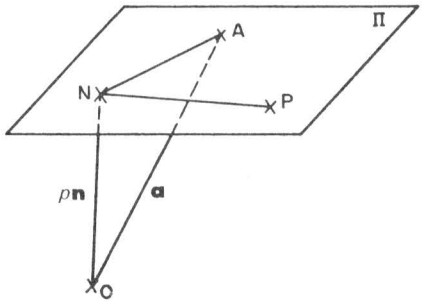


Fig. 36

$$\overline{AP} \,.\, \mathbf{n} = 0,$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \,.\, \mathbf{n} = 0$$

o bien $$\mathbf{r} \,.\, \mathbf{n} = \mathbf{a} \,.\, \mathbf{n} \qquad \text{(VI)}$$

de donde puede apreciarse que la longitud de la perpendicular desde el origen al plano Π es **a** . **n**.

§6.7. Diversas formas de la ecuación de un plano y de su distancia al origen

Sean A **(a)**, B **(b)**, C **(c)** tres puntos de un plano Π. Sea P **(r)** un punto cualquiera en Π. Entonces los vectores $\overline{AP}$, $\overline{BA}$, $\overline{CB}$ son coplanarios; es decir que los vectores **(r** − **a)**, **(a** − **b)**, **(b** − **c)** son coplanarios.

por tanto $$[(\mathbf{r} - \mathbf{a})(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{b} - \mathbf{c})] = 0$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \,.\, \{(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{c})\} = 0,$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \,.\, \{\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}\} = 0,$$

$$\mathbf{r} \,.\, (\mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}) - \mathbf{a} \,.\, (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0,$$

que puede escribirse

$$\mathbf{r} \,.\, (\mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}], \qquad \text{(VIII)}$$

o bien $$[\mathbf{r}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] + [\mathbf{r}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}] + [\mathbf{r}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}] = [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] \qquad \text{(IX)}$$

Si $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal al plano Π, y Δ es el área del triángulo ABC, entonces

$$\overline{BA} \times \overline{CB} = \pm 2\Delta\mathbf{n},$$

utilizándose el signo positivo o negativo, según que $\overline{BA}$, $\overline{CB}$, $\mathbf{n}$ formen o no un sistema normal dextrógiro.

i.e. $$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \pm 2\Delta\mathbf{n},$$

i.e. $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \pm 2\Delta\mathbf{n},$$

i.e. $$\mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \pm 2\Delta\mathbf{n},$$

i.e. $$2\Delta = |\, \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} \,| \qquad \text{(X)}$$

Entonces, según el párrafo 6.6 la longitud p de la perpendicular de O al plano Π viene dada por

$$p = \mathbf{a} \,.\, \mathbf{n}$$

$$= \frac{\pm\, \mathbf{a} \,.\, \{\mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}}{2\Delta}$$

i.e. $$p = \pm \frac{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}{|\, \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} \,|} \qquad \text{(XI)}$$

§6.8. Vector área y condición de colinearidad

Supongamos que A $(\mathbf{a})$, B $(\mathbf{b})$ y C $(\mathbf{c})$ son tres puntos cualesquiera. Entonces $\overline{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\overline{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$ y si Δ es el área del triángulo ABC, entonces según el párrafo 2.14, $\Delta\mathbf{n} = 1/2\ (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})$ donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal al plano del triángulo ABC de modo que AB, AC, $\mathbf{n}$ forman un sistema normal dextrógiro.

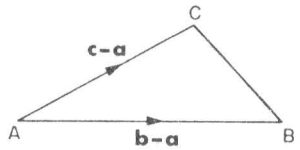


Fig 37

Entonces $$\Delta\mathbf{n} = \tfrac{1}{2}\{\mathbf{b} \times \mathbf{c} - \mathbf{b} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{c}\},$$
$$\Delta\mathbf{n} = \tfrac{1}{2}\{\mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}.$$

Si los puntos A, B, C están alineados, el área del triángulo ABC es cero, de aquí que la condición para la colinearidad de A, B, C sea

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$$

Ejemplo 1. *Escribir la ecuación de la recta que une los puntos* $(1, -3, 1)$ *y* $(0, -3, 2)$. *Escribir la ecuación del plano que pasa por el origen y los puntos* $(3, 4, 1)$ *y* $(6, 0, 2)$. *Hallar las coordenadas del punto en el que la recta corta al plano.*

La recta que une los puntos $(1, -3, 1)$ y $(0, -3, 2)$ tiene por ecuación

$$\mathbf{r} = (\mathbf{i}_1 - 3\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) + t(-\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3)$$

donde t es el parámetro para cada punto de la recta.

$$\mathbf{r} = (1 - t)\mathbf{i}_1 - 3\mathbf{i}_2 + (1 + t)\mathbf{i}_3. \qquad (1)$$

El plano que contiene a O y a los puntos $(3, 4, 1)$ y $(6, 0, 2)$ tiene por ecuación

$$\mathbf{r} = 0 + p(3\mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) + q(6\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_3),$$

donde p, q son los parámetros para cada punto del plano,

$$\mathbf{r} = (3p + 6q)\mathbf{i}_1 + 4p\mathbf{i}_2 + (p + 2q)\mathbf{i}_2 \qquad (2)$$

Supongamos que la recta (1) corta al plano (2) en el punto A (a) cuyos parámetros son t, p, q. Entonces

$$1 - t_1 = 3p_1 + 6q_1 \qquad (3)$$

$$-3 = 4p_1, \qquad (4)$$

$$1 + t_1 = p_1 + 2q_1. \qquad (5)$$

De (3) y (5)

$$3(1 + t_1) = 1 - t_1$$

por tanto $$4t_1 = -2,$$

y $$t_1 = -\tfrac{1}{2}.$$

Por tanto A es el punto cuyo vector de posición es $\mathbf{a}$, de donde

$$\mathbf{a} = (1 - t_1)\mathbf{i}_1 - 3\mathbf{i}_2 + (1 + t_1)\mathbf{i}_3,$$
$$= \tfrac{3}{2}\mathbf{i}_1 - 3\mathbf{i}_2 + \tfrac{1}{2}\mathbf{i}_3$$

i.e. A es el punto $(\frac{3}{2}, -3, \frac{1}{2})$.

Ejemplo 2. *Hallar la distancia desde el punto* (7, 8, 5) *al plano que pasa por los puntos* (1, 2, 3), (2, 4, 5), (3, 5, 9).

Sean A, B, C los puntos (1, 2, 3), (2, 4, 5), (3, 5, 9) respectivamente y D el punto (7, 8, 5). Sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ los vectores de posición de A, B, C, D y $\mathbf{n}$ el vector unitario normal al plano ABC en la dirección de O al plano.

Entonces $$\mathbf{a} = \mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3,$$

$$\mathbf{b} = 2\mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 + 5\mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{c} = 3\mathbf{i}_1 + 5\mathbf{i}_2 + 9\mathbf{i}_3,$$

$$\mathbf{d} = 7\mathbf{i}_1 + 8\mathbf{i}_2 + 5\mathbf{i}_3.$$

Sea $$\mathbf{n} = n_1\mathbf{i}_1 + n_2\mathbf{i}_2 + n_3\mathbf{i}_3$$

donde $$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

$$\overline{AB} = \mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3$$

$$\overline{AC} = 2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 + 6\mathbf{i}_3.$$

Como $\mathbf{n}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$,

entonces $$n_1 + 2n_2 + 2n_3 = 0$$

$$2n_1 + 3n_2 + 6n_3 = 0$$

por tanto $$\frac{n_1}{6} = \frac{n_2}{-2} = \frac{n_3}{-1} = \frac{1}{\sqrt{41}}. \qquad (1)$$

de donde $$\mathbf{n} = -\frac{6}{\sqrt{41}}\mathbf{i}_1 + \frac{2}{\sqrt{41}}\mathbf{i}_2 + \frac{1}{\sqrt{41}}\mathbf{i}_3 \qquad (2)$$

Entonces, si p_1 es la longitud de la perpendicular desde O al plano ABC,

$$p_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n},$$
$$= -\frac{6}{\sqrt{41}} + \frac{4}{\sqrt{41}} + \frac{3}{\sqrt{41}},$$

i.e. $$p_1 = \frac{1}{\sqrt{41}}.$$

Si p_2 es la longitud de la perpendicular desde O al plano que pasa por D paralelo al plano ABC,

$$p_2 = \mathbf{d} \cdot \mathbf{n},$$
$$= -\frac{42}{\sqrt{41}} + \frac{16}{\sqrt{41}} + \frac{5}{\sqrt{41}},$$

i.e. $$p_2 = -\frac{21}{\sqrt{41}}.$$

por consiguiente la distancia desde D al plano ABC es $22/\sqrt{41}$ unidades.

Nota 1. Se verá que la ecuación (I) da como resultado $n_1 : n_2 : n_3 = 6 : (-2) : (-1)$, o bien $n_1 : n_2 : n_3 = (-6) : 2 : 1$, siendo $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Los signos en la ecuación (2) se han elegido para hacer **a** . **n** positivo, asegurando así que el sentido de **n** es desde O al plano ABC.

Nota 2. El alumno deberá tener en cuenta que la elección de los signos en la ecuación (2) da resultado negativo para el producto **d** . **n**, demostrando así que la perpendicular desde O al plano Π que pasa por D, paralelo al plano ABC, es de sentido opuesto a la perpendicular desde O al plano ABC; y que la perpendicular desde O al plano Π se encuentra en realidad en la dirección $-\mathbf{n}$. El resultado negativo **d** . **n** indica, por consiguiente, que el plano Π está al otro lado de O respecto al plano ABC, o lo que es lo mismo, O está entre ambos planos.

Si p_3 es la perpendicular desde O al plano Π′ que pasa por E $(-1, 3, 2)$, entonces

$$p_3 = \mathbf{e} \,.\, \mathbf{n}$$

donde **e** es el vector de posición de E.

De donde $$p_3 = \frac{6}{\sqrt{41}} + \frac{6}{\sqrt{41}} - \frac{2}{\sqrt{41}}$$

i.e. $$p_3 = \frac{10}{\sqrt{41}}$$

demostrando que Π′ está al mismo lado de O que el plano ABC, pero bastante alejado de O.

La distancia de E al plano ABC es, por consiguiente $9/\sqrt{41}$ unidades.

Ejemplo 3. *Hallar las coordenadas del punto en el que la recta que pasa por* A $(2, 3, 4)$ *y* B $(1, 4, -3)$ *corta al plano* (x, y).

El vector de posición **r** de cualquier punto P en AB satisface la ecuación

$$\mathbf{r} = (2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 + 4\mathbf{i}_3) + t(-\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 - 7\mathbf{i}_3)$$

i.e. $$\mathbf{r} = (2 - t)\mathbf{i}_1 + (3 + t)\mathbf{i}_2 + (4 - 7t)\mathbf{i}_3$$

donde t es el parámetro de P.

Si P está en el plano (x, y)

$$4 - 7t = 0,$$

i.e. $$t = \frac{4}{7}.$$

De donde $$\mathbf{r} = \frac{10}{7}\mathbf{i}_1 + \frac{25}{7}\mathbf{i}_2 + 0\mathbf{i}_3$$

i.e. P es el punto $\left(\frac{10}{7}, \frac{25}{7}, 0\right)$.

Ejemplos VI

1. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por los pares de puntos:

(i) (2, 3, 5), (1, 0, 7);
(ii) (1, 5, 2), (−3, 2, 4);
(iii) (4, 2, 5), (−1, 1, −2);
(iv) (−5, 1, 2), (4, −3, 1);
(v) (2, 5, −1), (−7, 1, 3).

2. Hallar la ecuación de la recta que

(i) pasa por A (1, −1, 3) y tiene las razones de dirección 2 : −1 : 2;
(ii) pasa por A (−2, 1, 5) y tiene las razones de dirección 2 : 3 : 4;
(iii) pasa por A (−1, −2, 1) y tiene las razones de dirección 3 : 4 : 6;
(iv) pasa por A (2, −3, 4) y tiene las razones de dirección 1 : 3 : −2;
(v) pasa por A (2, −3, 4) y es normal al plano BCD donde B, C, D son los puntos (1, 2, 9), (4, 5, 6), (2, −3, 4) respectivamente;
(vi) pasa por A (−1, −2, 4) y es normal al plano FGH, donde F, G, H son los puntos (−2, 3, −4), (3, 1, 8), (4, −1, 0) respectivamente.

3. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos

(i) A (1, 1, −3/4),	B (4, −3, −2),	C (2, −3, −3);
(ii) A (2, 1, 2),	B (−2, −1, 3),	C (7, 2, −3);
(iii) A (3, 1, −4),	B (2, −1, 2),	C (−3, 2, 1);
(iv) A (−2, −3, 5),	B (9, 1, 4),	C (7, −3, 2).

4. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (1, 3, −4) y es normal al vector $(2\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3)$.

5. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (−2, 1, 5) y es normal al vector $(3\mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 + 6\mathbf{i}_3)$.

6. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (3, −2, 1) y es normal al vector $(-2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 + 4\mathbf{i}_3)$.

7. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (1, 1, 8) y es normal a la recta

$$\mathbf{r} = 2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 + 5\mathbf{i}_3 + t(3\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3)$$

8. Haliar el vector de posición del punto en el que la recta que pasa por A (2, 1, 7) y B (−3, 2, 1) corta al plano (y, z).

9. Hallar el vector de posición del punto de intersección de AB y CD, donde A, B, C, D son los puntos cuyos vectores de posición son $8\mathbf{i}_1 - 7\mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3$, $18\mathbf{i}_1 - 17\mathbf{i}_2 - 3\mathbf{i}_3$, $2\mathbf{i}_1 + 5\mathbf{i}_2 - 3\mathbf{i}_3$, $4\mathbf{i}_1 + 6\mathbf{i}_2 - 8\mathbf{i}_3$.

10. Una caja rectangular tiene tres ejes concurrentes OA, OB, OC de longitudes 3, 2 y 1 unidades respectivamente; las rectas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ forman un sistema de ejes dextrógiro. Los vértices de la caja diagonalmente opuestos a O, A, B, C son O', A', B', C'. Tomando $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ como vectores unitarios sobre $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ respectivamente, demostrar que la ecuación del plano $A'B'C'$ es

$$\mathbf{r} \cdot (2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 + 6\mathbf{i}_3) = 12$$

Hallar (i) la distancia desde O a este plano y (ii) el vector de posición del punto donde OO' corta al plano $A'B'C'$.

11. Hallar la distancia entre el punto A (4, 3, 3) y la recta que pasa por los puntos B (3, 5, 3) y C (3, 3, 6).

12. O, A, B, C y O', A', B', C' son los vértices correspondientes de las caras opuestas de un cubo de lado $2a$; es decir, OO', AA', BB', CC' son aristas paralelas del cubo. $\overline{OA}$, $\overline{OC}$, $\overline{OO'}$ forman un sistema de ejes dextrógiro y H, K son los puntos medios de OA y $O'C'$ respectivamente. Hallar (1) la distancia desde O' al plano HKA', (2) la distancia entre el plano HKA' y el plano paralelo a él que pasa por B.

13. Hallar la distancia del plano que pasa por los puntos (1, 2, −1), (1, 1, 2), (2, 3, 2) al plano paralelo que pasa por el punto (4, −5, 1).

14. A (a), B (b), C (c) son tres puntos en la superficie de una esfera de radio unidad cuyo centro está en el origen. Demostrar que

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$;
(ii) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\}\mathbf{a}$.

15. Definir el producto $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ de dos vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y demostrar que si $\mathbf{u}$ es de longitud unidad, entonces $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}$ es la componente de $\mathbf{v}$ perpendicular a $\mathbf{u}$.

A, B son dos puntos fijos y $\mathbf{w}$ es un vector fijo perpendicular a $\overline{AB}$. Expresar en términos geométricos los lugares geométricos definidos por

(i) $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 0$, y (ii) $\overline{AP} \times \overline{BP} = \mathbf{w}$.

16. La recta que une A (a) con B (b) corta a la recta que une P (p) con Q (q) en R. Demostrar que el vector de posición $\mathbf{r}$ de R satisface las relaciones

$$\mathbf{a} \times \mathbf{r} + \mathbf{r} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} = 0$$

y

$$\mathbf{p} \times \mathbf{r} + \mathbf{r} \times \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p} = 0$$

Si R es el punto medio de AB y PQ, hallar una relación entre los vectores de posición de A, B, P, Q y demostrar que $APBQ$ es un paralelogramo.

17. A, B, C, D y A', B', C', D' son los vértices correspondientes a las caras opuestas de un cubo de lado $2a$. AA', BB', CC', DD' son las aristas paralelas y son paralelas a las caras $ABCD$ y $A'B'C'D'$. El cubo está definido de tal manera que los vectores unitarios $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ a lo largo de $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ y $\overline{AA'}$ forman un sistema ortonormal directo. X, Y, Z son los puntos medios de AD, $D'D$ y BC. Expresar $\overline{AX}$, $\overline{AY}$, $\overline{AZ}$, $\overline{AC}$ de la forma $r_1\mathbf{i}_1 + r_2\mathbf{i}_2 + r_3\mathbf{i}_3$.

Hallar la ecuación del plano XYC tomando A como origen, y hallar la distancia desde Z a este plano.

18. (i) Demostrar que la distancia del origen al plano que pasa por los puntos $(2, 0, -2)$, $(1, 4, -2)$, $(-1, 2, 2)$ es $6/\sqrt{93}$ unidades.

(ii) Hallar los puntos A, B en los que se cortan la recta que pasa por los puntos $(6, -3, -5)$, $(-3, 12, 10)$ y los planos que pasan por el origen y son perpendiculares a $\mathbf{i}_1$ e $\mathbf{i}_3$ respectivamente y demostrar que la distancia entre A y B es $\sqrt{59}$ unidades.

(iii) Hallar el punto en el que la recta de (ii) corta al plano de (i).

19. Demostrar que la distancia más corta entre dos rectas $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ y $\mathbf{r} = \mathbf{a}' + t\mathbf{b}'$ viene dada por

$$p = \pm \frac{[(\mathbf{a} - \mathbf{a}'), \mathbf{b}, \mathbf{b}']}{|\mathbf{b} \times \mathbf{b}'|}.$$

Todas las aristas de un tetraedro tienen una longitud $2l$. Demostrar que la distancia más corta entre dos aristas opuestas es $l\sqrt{2}$.

20. Demostrar que si $\mathbf{n}$, $\mathbf{a}$ son vectores paralelos a las rectas ON y OA, entonces $(\mathbf{n} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{n}$ es paralelo a la proyección de OA sobre un plano perpendicular a ON.

Dos planos forman un ángulo θ y una recta forma los ángulos α, β con sus normales. Demostrar que si las proyecciones de la recta sobre los dos planos forman un ángulo recto, entonces

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = \pm \cos\alpha \cos\beta \cos\theta.$$

CAPITULO VII

§7.1. Ecuaciones paramétricas

Si $\mathbf{r}$ es un vector de posición de un punto P, entonces $\mathbf{r}$ puede expresarse de la forma

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_1 + y\mathbf{i}_2 + z\mathbf{i}_3 \tag{1}$$

donde cada una de las componentes x, y, z debe conocerse para definir unívocamente la posición de P. Supongamos que cada componente x, y, z, es una función continua de valor único de una variable real continua t, tal que

$$x = f_1(t),$$
$$y = f_2(t),$$
$$z = f_3(t);$$

entonces t es el parámetro del punto P. Si T es el conjunto de valores que t puede tomar, de tal manera que $t \in T$, la relación (1) define un conjunto de puntos $\{P\}$. Como cualquier punto particular P del conjunto está determinado por un valor particular t del conjunto T, el conjunto de puntos P se dice que tiene *un grado de libertad*. Geométricamente tal conjunto de puntos define una recta.

Supongamos ahora que cada componente x, y, z es una función de valor único de las dos variables reales continuas t, s, siendo t el conjunto de valores de T y siendo s el conjunto de valores de S, de forma que

$$x = F_1(t, s),$$
$$y = F_2(t, s),$$
$$z = F_3(t, s),$$

donde $t \in T$ y $s \in S$. El vector de posición $\mathbf{r}$ viene ahora definido unívocamente sólo si se conoce el valor de ambos parámetros t y s; el punto P se dice que tiene *dos grados de libertad.* Geométricamente el conjunto de puntos $\{P\}$ define una *superficie.*

Hemos considerado ya en el Capítulo VI el caso en el que $f_1(t)$, $f_2(t), f_3(t)$ son todas expresiones de primer grado en t y el conjunto de puntos P está sobre una recta. También hemos considerado el caso en que $F_1(t, s), F_2(t, s), F_3(t, s)$ son de primer grado en t y s y el conjunto de puntos P determina una superficie plana. Consideramos ahora unos cuantos casos simples en los que las funciones $f_k(t), F_k(t, s)\ (k = 1, 2, 3)$, no son funciones algebraicas de primer grado.

§7.2. Tangente a una curva

Supongamos que la ecuación de una curva es

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_1 + y\mathbf{i}_2 + z\mathbf{i}_3, \tag{2}$$

donde $x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$. Sea P un punto de una curva con parámetro t, y sea P' un punto en la curva próximo a P, con parámetro $t + \delta t$. Entonces

$$\mathbf{r} + \delta\mathbf{r} = (x + \delta x)\mathbf{i}_1 + (y + \delta y)\mathbf{i}_2 + (z + \delta z)\mathbf{i}_3, \tag{3}$$
$$\delta\mathbf{r} = \delta x\,\mathbf{i}_1 + \delta y\,\mathbf{i}_2 + \delta z\,\mathbf{i}_3,$$

de donde

$$\delta\mathbf{r} \doteq \left(\frac{dx}{dt}\,\mathbf{i}_1 + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{i}_2 + \frac{dz}{dt}\,\mathbf{i}_3\right)\delta t. \tag{4}$$

Para un pequeño incremento dado δt de t, existe un punto único P' sobre la curva; cuando $\delta t \to 0$, $P' \to P$ y la recta PP' tiende hacia la tangente en P. De (4) se puede ver que las razones de dirección de PP' son $dx/dt : dy/dt : dz/dt$, es decir que las razones de dirección de la tangente en P son $dx/dt : dy/dt : dz/dt$.

Cualquier recta que pase por P perpendicular a la tangente en P, es normal a la curva, así pues existe un número infinito de tales normales y todas ellas están en el plano que pasa por P y es normal al vector

$$\frac{dx}{dt}\,\mathbf{i}_1 + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{i}_2 + \frac{dz}{dt}\,\mathbf{i}_3.$$

§7.3. Plano tangente a una superficie

Imaginemos que la ecuación de una superficie viene dada por

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i}_1 + y\,\mathbf{i}_2 + z\,\mathbf{i}_3 \tag{5}$$

donde $x = F_1(t, s), y = F_2(t, s), z = F_3(t, s)$. Sea P un punto de la superficie cuyo vector de posición es $\mathbf{r}$ y los parámetros t, s. Sea P' un punto póximo a la superficie, cuyo vector de posición es $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ y cuyos parámetros son $t + \delta t$, $s + \delta s$. Entonces, con la notación de costumbre

$$\delta\mathbf{r} = \delta x\,\mathbf{i}_1 + \delta y\,\mathbf{i}_2 + \delta z\,\mathbf{i}_3 \tag{6}$$

de donde

$$\delta\mathbf{r} \doteq \left(\frac{\partial x}{\partial t}\,\delta t + \frac{\partial x}{\partial s}\,\delta s\right)\mathbf{i}_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\,\delta t + \frac{\partial y}{\partial s}\,\delta s\right)\mathbf{i}_2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\,\delta t + \frac{\partial z}{\partial s}\,\delta s\right)\mathbf{i}_3 \tag{7}$$

i.e.

$$\delta\mathbf{r} \simeq \left(\frac{\partial x}{\partial t}\,\mathbf{i}_1 + \frac{\partial y}{\partial t}\,\mathbf{i}_2 + \frac{\partial z}{\partial t}\,\mathbf{i}_3\right)\delta t + \left(\frac{\partial x}{\partial s}\,\mathbf{i}_1 + \frac{\partial y}{\partial s}\,\mathbf{i}_2 + \frac{\partial z}{\partial s}\,\mathbf{i}_3\right)\delta s. \quad (8)$$

Dado que δt, δs son incrementos pequeños independientes, la relación (7) define un conjunto de rectas PP' que resultan todas ellas tangentes a la superficie (5) cuando $\delta t \to 0$, $\delta s \to 0$. Sean λ, μ, ν, elegidos de modo que

$$\left.\begin{aligned} \lambda\frac{\partial x}{\partial t} + \mu\frac{\partial y}{\partial t} + \nu\frac{\partial z}{\partial t} &= 0 \\ \text{y} \qquad\qquad \lambda\frac{\partial x}{\partial s} + \mu\frac{\partial y}{\partial s} + \nu\frac{\partial z}{\partial s} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Entonces el vector $\mathbf{n} = \lambda\mathbf{i}_1 + \mu\mathbf{i}_2 + \nu\mathbf{i}_3$ es perpendicular a PP', para todos los puntos P' definidos por (7) ya que

$$\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{r} = \left(\lambda\frac{\partial x}{\partial t} + \mu\frac{\partial y}{\partial t} + \nu\frac{\partial z}{\partial t}\right)\delta t + \left(\lambda\frac{\partial x}{\partial s} + \mu\frac{\partial y}{\partial s} + \nu\frac{\partial z}{\partial s}\right)\delta s = 0,$$

i.e. todas las tangentes en P a la superficie (5) son normales al vector $\mathbf{n}$. De aquí que todas las tangentes en P a la superficie (5) están en el plano que pasa por P cuya normal tiene las razones de dirección $\lambda : \mu : \nu$. Este plano se conoce como *plano tangente* a la superficie (5). Las razones $\lambda : \mu : \nu$ son iguales a las razones de los determinantes de segundo orden de la matriz

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial s} \end{pmatrix} \quad (10)$$

De donde el plano tangente a la superficie (5), en el punto cuyos parámetros son t, s, es el plano por ese punto cuya normal tiene razones de dirección dadas por las razones de los determinantes de segundo orden de la matriz (10).

Ejemplo 1. *Hallar la ecuación de la tangente en el punto* $t = \pi/3$ *a la curva* $r = (\log\cos t)\,\mathbf{i}_1 + (\log\operatorname{sen} t)\,\mathbf{i}_2 + (t\sqrt{3})\,\mathbf{i}_3$.

La curva es

$$\mathbf{r} = (\log\cos t)\mathbf{i}_1 + (\log\sin t)\mathbf{i}_2 + (t\sqrt{3})\mathbf{i}_3.$$

Entonces las razones de dirección a la tangente en el punto P, cuyo parámetro es t, son

$$\frac{1}{\cos t_1}(-\sin t_1) : \frac{1}{\sin t_1}(\cos t_1) : \sqrt{3},$$

i.e.

$$(-\tan t_1) : \frac{1}{\tan t_1} : \sqrt{3}.$$

De aquí que las razones de dirección de la tangente en el punto A cuyo parámetro es $\pi/3$ son

$$(-\sqrt{3}) : \frac{1}{\sqrt{3}} : \sqrt{3},$$

i.e.

$$(-3) : 1 : 3,$$

por tanto la ecuación de la tangente en A es

$$\mathbf{r} = (\log 1/2)\mathbf{i}_1 + (\log \sqrt{3}/2)\mathbf{i}_2 + (\pi\sqrt{3}/3)\mathbf{i}_3 + (-3\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3)s$$

donde s es un parámetro,

$$\text{i.e. } \mathbf{r} = \left(-3s + \log\frac{1}{2}\right)\mathbf{i}_1 + \left(s + \log\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{i}_2 + \left(3s + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right)\mathbf{i}_3.$$

Ejemplo 2. *Hallar la ecuación de un plano que toca a la superficie* $r = (t + 2s)\,\mathbf{i}_1 + (t - 2s)\,\mathbf{i}_2 + 4ts\mathbf{i}_3$ *en el punto de corte con la recta* $r = (5 - \theta)\,\mathbf{i}_1 + (1 - \theta)\,\mathbf{i}_2 + (12 - \theta)\,\mathbf{i}_3$ *donde t, s, θ son parámetros.*

Supongamos que la recta

$$\mathbf{r} = (5 - \theta)\mathbf{i}_1 + (1 - \theta)\mathbf{i}_2 + (12 - \theta)\mathbf{i}_3 \qquad \text{(i)}$$

corta a la superficie

$$\mathbf{r} = (t + 2s)\mathbf{i}_1 + (t - 2s)\mathbf{i}_2 + 4ts\mathbf{i}_3 \qquad \text{(ii)}$$

en el punto P_1 cuyos parámetros son t, s, θ_1.

Entonces
$$5 - \theta_1 = t_1 + 2s_1 \qquad \text{(iii)}$$
$$1 - \theta_1 = t_1 - 2s_1 \qquad \text{(iv)}$$
$$12 - \theta_1 = 4t_1s_1 \qquad \text{(v)}$$

De (iii) y (iv), $s_1 = 1$, $3 - t_1 = \theta_1$

$$12 - \theta_1 = 4(3 - \theta_1)(1)$$
$$\theta_1 = 0$$

y
$$t_1 = 3.$$

Luego (i) y (ii) se cortan en el punto P_1 $(5, 1, 12)$.

De (ii) deducimos que las razones de dirección de la normal a la superficie en el punto P son $\lambda : \mu : \nu$ donde

$$(1)\lambda + (1)\mu + (4s)\nu = 0,$$
$$(2)\lambda + (-2)\mu + (4t)\nu = 0.$$

De donde las razones de dirección de la normal a la superficie en P están dadas por

$$\text{i.e.} \quad \begin{cases} \lambda + \mu + 4\nu = 0 \\ 2\lambda - 2\mu + 12\nu = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \lambda + \mu + 4\nu = 0 \\ \lambda - \mu + 6\nu = 0 \end{cases}$$

de donde
$$\frac{\lambda}{10} = \frac{\mu}{-2} = \frac{\nu}{-2}$$

i.e.
$$\frac{\lambda}{5} = \frac{\mu}{-1} = \frac{\nu}{-1}$$

así pues, la ecuación del plano tangente en P_1 es

$$\mathbf{r} \cdot (5\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3) = (5\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + 12\mathbf{i}_3) \cdot (5\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3)$$

i.e.
$$\mathbf{r} \cdot (5\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3) = 12.$$

§7.4. Algunos casos especiales

(*a*) Consideremos la curva cuya ecuación es

$$\mathbf{r} = at^2\mathbf{i}_1 + 2at\mathbf{i}_2. \qquad \text{(I)}$$

Como no existe componente en la dirección de $\mathbf{i}_3$, el vector $\mathbf{r}$ estará en el plano de $\mathbf{i}_1$ e $\mathbf{i}_2$. De aquí que la curva (I) debe ser una curva

plana en el plano (x, y). Partiendo también de que tiene coordenadas paramétricas $x = at^2$, $y = 2at$, podemos ver que la curva es una parábola con OX como eje, O como vértice y OY como tangente en el vértice.

(b) Igualmente la curva

$$\mathbf{r} = (a \cos \theta)\mathbf{i}_1 + (b \sin \theta)\mathbf{i}_2 \qquad \text{(II)}$$

se puede ver que es una elipse en el plano (x, y) de eje mayor $2a$ sobre OX y de eje menor $2b$ sobre OY, y su centro está en O.

(c) La superficie

$$\mathbf{r} = (a \cos \theta)\mathbf{i}_1 + (b \sin \theta)\mathbf{i}_2 + c\phi\mathbf{i}_3 \qquad \text{(III)}$$

se puede ver que es un cilindro con su eje sobre OZ, y cualquier sección paralela al plano (x, y) es una elipse con su centro en OZ y ejes de longitud $2a$ y $2b$ paralelos a OX y OY respectivamente.

(d) La ecuación

$$\mathbf{r} = (a \cos \theta)\mathbf{i}_1 + (b \sin \theta)\mathbf{i}_2 + c\theta\mathbf{i}_3 \qquad \text{(IV)}$$

representa una curva ya que solamente tiene un grado de libertad. El conjunto de puntos que define esta curva es el subconjunto de puntos que definen la superficie (III) para los cuales $\theta = \phi$. De aquí que la curva (IV) sea una curva definida sobre la superficie del cilindro (III).

(e) Si en la ecuación (III) anterior, hacemos $a = b$, la superficie se convierte en un cilindro circular cuya ecuación es

$$\mathbf{r} = (a \cos \theta)\mathbf{i}_1 + (a \sin \theta)\mathbf{i}_2 + c\phi\mathbf{i}_3. \qquad \text{(V)}$$

(f) Si en la ecuación anterior (IV), $a = b$ la ecuación de la curva se convierte en

$$\mathbf{r} = (a \cos \theta)\mathbf{i}_1 + (a \sin \theta)\mathbf{i}_2 + c\theta\mathbf{i}_3 \qquad \text{(VI)}$$

que representa una curva sobre la superficie de un cilindro circular de radio a. De la ecuación (VI) observamos que las razones de dirección de la tangente en P cuyo parámetro es θ, son

$$(-a \sin \theta) : (a \cos \theta) : c.$$

por consiguiente los cosenos directores de la tangente en P son

$$-\frac{a \sin \theta}{\sqrt{(a^2 + c^2)}}, \quad \frac{a \cos \theta}{\sqrt{(a^2 + c^2)}}, \quad \frac{c}{\sqrt{(a^2 + c^2)}}.$$

A partir de este resultado puede apreciarse que la tangente en P es oblicua al eje z con un ángulo constante $\cos^{-1} c/\sqrt{a^2 + c^2}$. Cualquier curva con la propiedad de que la tangente forme un ángulo constante con una dirección fija es una *hélice*. Así pues, la curva representada por la ecuación (VI) es una hélice; dado que esta curva se desarrolla sobre la superficie de un cilindro circular se denomina *hélice circular*.

Ejemplos VII

1. Probar que la tangente en cualquier punto de la hélice

$$\mathbf{r} = (a \cos \theta)\mathbf{i}_1 + (a \sin \theta)\mathbf{i}_2 + a\theta\mathbf{i}_3$$

forma un ángulo $\pi/4$ con OZ. Hallar la ecuación de la hélice circular que forma un ángulo constante $\pi/3$ con OX.

2. Demostrar que las parábolas

$$\mathbf{r} = 4t^2\mathbf{i}_1 + 2t\mathbf{i}_2$$

y

$$\mathbf{r} = (4 + s^2)\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 2s\mathbf{i}_3$$

se cortan. Hallar su punto de intersección y el ángulo entre sus tangentes en ese punto.

3. Hallar los puntos de intersección de la circunferencia

$$\mathbf{r} = (4 \cos \theta)\mathbf{i}_1 + (4 \sin \theta)\mathbf{i}_2$$

y la parábola

$$\mathbf{r} = 2t\mathbf{i}_1 + (t^2 - 4)\mathbf{i}_3.$$

4. Demostrar que la curva

$$\mathbf{r} = (a \cosh t \cos t)\mathbf{i}_1 + (a \cosh t \sin t)\mathbf{i}_2 + at\mathbf{i}_3$$

toca la hélice

$$\mathbf{r} = (a \cos \theta)\mathbf{i}_1 + (a \sin \theta)\mathbf{i}_2 + a\theta\mathbf{i}_3.$$

Hallar el vector de posición del punto de contacto y la ecuación de la tangente común.

5. Demostrar que la curva

$$\mathbf{r} = (a_1t^2 + b_1t + c_1)\mathbf{i}_1 + (a_2t^2 + b_2t + c_2)\mathbf{i}_2 + (a_3t^2 + b_3t + c_3)\mathbf{i}_3$$

es una curva plana y hallar la ecuación del plano en el que se encuentra.

6. Demostrar que una hélice circular corta a cualquier generatriz de un cilindro en el que se desarrolla.

7. Demostrar que las hélices

$$\mathbf{r} = (a \cos \theta)\mathbf{i}_1 + (a \sin \theta)\mathbf{i}_2 + a\theta\mathbf{i}_3$$

y

$$\mathbf{r} = (a \cos \phi)\mathbf{i}_1 + (a \sin \phi)\mathbf{i}_2 + 2a\phi\mathbf{i}_3$$

tienen un número infinito de puntos de intersección. Demostrar también que todos estos puntos de intersección están sobre la misma recta paralela a OZ. Si P_1, P_2, ... son puntos sucesivos de intersección, demostrar que las distancias P_1P_2, P_2P_3, ... son iguales. Hallar esta distancia común.

8. Si A es el punto $t = \pi/4$ en la curva

$$\mathbf{r} = (\log \cos t)\mathbf{i}_1 + (\log \sin t)\mathbf{i}_2 + (t\sqrt{2})\mathbf{i}_3,$$

y si OB es la perpendicular desde el origen a la tangente en A, hallar las coordenadas de B.

9. Demostrar que la curva

$$\mathbf{r} = at^3\mathbf{i}_1 + a\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)t^2\mathbf{i}_2 + at\mathbf{i}_3$$

corta a la superficie

$$\mathbf{r} = (a \cos \theta \cos \phi)\mathbf{i}_1 + (a \cos \theta \sin \phi)\mathbf{i}_2 + (a \sin \theta)\mathbf{i}_3$$

en los puntos cuyo parámetro t satisface la ecuación

$$2t^6 + 3t^4 + 2t^2 - 2 = 0.$$

Demostrar que una solución de esta ecuación es $t = 1/\sqrt{2}$, y hallar los valores correspondientes de θ, ϕ. Si A es el punto para el que $t = 1/\sqrt{2}$, hallar el ángulo entre la curva y la superficie en A.

N.B. *El ángulo entre una curva y una superficie en un punto de intersección es el ángulo entre la tangente a la curva y el plano tangente a la superficie.*

SOLUCIONES

Ejemplos Ia pág. 28

6. Radio del l.g. de $Q = 4$ (radio del l.g. de P).
7. B se mueve sobre el arco XY al otro lado de A.

Ejemplos Ib pág. 42

1. $\overrightarrow{PQ} = -5\mathbf{i}_1 - 8\mathbf{i}_2 + 5\mathbf{i}_3$; razones de dirección $5 : 8 : -5$; magnitud $\sqrt{114}$.
2. $\overrightarrow{AB} = 8\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 + 5\mathbf{i}_3$; razones de dirección $8 : 3 : 5$; magnitud $7\sqrt{2}$.
3. $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b}$; $\overrightarrow{DB} = -\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$; $\overrightarrow{BC} = 2\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$; $\overrightarrow{CA} = -\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.
4. $D \ldots \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$; $E \ldots 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$; $F \ldots 2\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$.
14. Razones de dirección $3 : 10 : 3$; $OC = \frac{1}{5}\sqrt{118}$.
18. Resultante $= 8\mathbf{i}_1 + 13\mathbf{i}_2 + 14\mathbf{i}_3$ N; razones de dirección $8 : 13 : 14$; magnitud 20·7 N.
19. Resultante = 36·38 N; razones de dirección $5 : 9 : 15$.
20. 7·42 N; razones de dirección $5 : 6 : 7$.
21. 7·18 N; razones de dirección $3 (\sqrt{2} + \sqrt{3}) : 3 (\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) : (3\sqrt{2} - \sqrt{3})$

Ejemplos IIa pág. 62

1. $+3$. **2.** $+2$. **3.** -3. **4.** -17.
5. $19\mathbf{i}_1 - 8\mathbf{i}_2 - 10\mathbf{i}_3$. **6.** $19\mathbf{i}_1 + 11\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3$.
7. $-28\mathbf{i}_1 + 20\mathbf{i}_2 + 4\mathbf{i}_3$. **8.** $-5\mathbf{i}_1 + 23\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3$.
9. -20 J. **10.** $(-27\mathbf{i}_1 + 24\mathbf{i}_2 - 3\mathbf{i}_3)$ newton-metro unidades.
11. (i) -23; (ii) $\mathbf{i}_1 - 6\mathbf{i}_2 - 32\mathbf{i}_3$.
12. (i) -14; (ii) $-45\mathbf{i}_1 + 12\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3$.
13. $26/\sqrt{11}$ J.
14. $(40\mathbf{i}_1 - 22\mathbf{i}_2 - 2\mathbf{i}_3)$ newton-metro unidades.
15. $A = \cos^{-1}23/(\sqrt{41})(\sqrt{19})$; $B = \cos^{-1}18/(\sqrt{14})(\sqrt{41})$;
$\hat{C} = \cos^{-1}(-4/(\sqrt{14})(\sqrt{19}))$.
16. 7·33 cm.

Ejemplos IIb pág. 69

1. (i) 91; (ii) 132; (iii) -160; (iv) -25; (v) 103.
2. (i) $-94\mathbf{i}_1 - 72\mathbf{i}_2 + 62\mathbf{i}_3$; (ii) $-86\mathbf{i}_1 - 27\mathbf{i}_2 - 34\mathbf{i}_3$;
(iii) $56\mathbf{i}_1 + 32\mathbf{i}_2 + 96\mathbf{i}_3$; (iv) $27\mathbf{i}_1 + 206\mathbf{i}_2 + 134\mathbf{i}_3$;
(v) $45\mathbf{i}_1 - 113\mathbf{i}_2 - 57\mathbf{i}_3$.
3. (i) 113; $-6\mathbf{i}_1 - 15\mathbf{i}_2 + 12\mathbf{i}_3$ (ii) 44; $-42\mathbf{i}_1 - 72\mathbf{i}_2 + 54\mathbf{i}_3$
(iii) -51; $-59\mathbf{i}_1 + 23\mathbf{i}_2 - 26\mathbf{i}_3$ (iv) 86; $-12\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 + 8\mathbf{i}_3$
(v) -92; $-731\mathbf{i}_1 + 558\mathbf{i}_2 - 331\mathbf{i}_3$.

Ejemplos III pág. 79

1. (i) $(2\cos t)\mathbf{i}_1 - (3\sin t)\mathbf{i}_2 + (2\cos 2t)\mathbf{i}_3$;
(ii) $(12t^3)\mathbf{i}_1 + (15t^2)\mathbf{i}_2 + 4\mathbf{i}_3$;
(iii) $(2e^{2t})\mathbf{i}_1 + (3e^{3t})\mathbf{i}_2 + (4e^{4t})\mathbf{i}_3$;
(iv) $(6t)\mathbf{i}_1 + (3t^2 - 8t + 3)\mathbf{i}_2 + (4\cos 4t)\mathbf{i}_3$;
(v) $\{t/\sqrt{(t^2+1)}\}\mathbf{i}_1 + (1/t)\mathbf{i}_2 + (12t^3)\mathbf{i}_3$.

2. (i) $(2 + 3t^2)\mathbf{i}_1 + (6t + 1)\mathbf{i}_2 + (12t^2)\mathbf{i}_3$;
(ii) $4 - 18t + 60t^2$;
(iii) $(9t^2 - 4)\mathbf{i}_1 + (18t^2)\mathbf{i}_2 + (2 + 9t^2)\mathbf{i}_3$;
(iv) $-(15t^4 + 20t^3)\mathbf{i}_1 + (30t^5 + 8t^3)\mathbf{i}_2 + (-15t^4 + 4t)\mathbf{i}_3$;
(v) $(-3 + 3t^2 + 8t^3 - 30t^5)$;
(vi) $(16t - 64t^3 - 90t^4 - 90t^5)$;
(vii) $(-12t - 32t^3 + 45t^4 - 120t^5)\mathbf{i}_1 + (-8t - 80t^3 - 30t^5)\mathbf{i}_2$
$+ (-27t^2 - 44t^3 + 60t^5)\mathbf{i}_3$;
(viii) $8t + 36t^3 + 150t^5$;
(ix) $9t^2 + 8t^3 - 30t^5$;
(x) $2t + 12t^5$.

En las siguientes soluciones, k es un vector constante y c un escalar constante.

4. (i) $\frac{t^3}{3}\mathbf{i}_1 + \frac{t^2}{2}\mathbf{i}_2 + t\mathbf{i}_3 + \mathbf{k}$;

(ii) $(-\cos t)\mathbf{i}_1 + (\sin t)\mathbf{i}_2 + \frac{t^2}{2}\mathbf{i}_3 + \mathbf{k}$;

(iii) $e^t\mathbf{a} + \mathbf{k}$; (iv) $\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2} + c$;

6. (i) $(te^t)\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b} + c$;
(ii) $(-\frac{1}{2}\sin 2t)\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{k}$.

8. $(9t^2)\mathbf{i}_1 + (1/t)\mathbf{i}_2 - (1/t^2)\mathbf{i}_3$.

9. (i) $3(t^2 - 1)\mathbf{i}_1 + 4t^3\mathbf{i}_2 + 3(t^2 + 1)\mathbf{i}_3$; (ii) $-2t$.

Ejemplos IVa pág. 87

1. (i) $(\cos t)\mathbf{i}_1 - (\sin t)\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$; $-(\sin t)\mathbf{i}_1 - (\cos t)\mathbf{i}_2$;
(ii) $3t^2\mathbf{i}_1 + 2t\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3$; $6t\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2$;

(iii) $\left(\frac{1}{t}\right)\mathbf{i}_1 - 2e^{2t}\mathbf{i}_2 + 2t\mathbf{i}_3$; $-\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathbf{i}_1 - 4e^{2t}\mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3$;

(iv) $2\mathbf{a}e^{2t}$; $4\mathbf{a}e^{2t}$;
(v) $2\mathbf{a}\cos 2t - 2\mathbf{b}\sin 2t$; $-4\mathbf{a}\sin 2t - 4\mathbf{b}\cos 2t$.

2. Velocidad $= a\omega e^{\theta}\mathbf{l}_1 + a\omega e^{\theta}\mathbf{l}_2$;
Aceleración $= 2a\omega^2 e^{\theta}\mathbf{l}_2$.

3. Velocidad $= \{\frac{1}{3}(r^2\omega \sin\theta)\mathbf{l}_1 + r\omega\mathbf{l}_2$;
Aceleración $= \frac{1}{3}r^2\omega^2(2 - \cos\theta) - r\omega^2\}\,\mathbf{l}_1 + \frac{2}{3}r^2\omega^2(\sin\theta)\mathbf{l}_3$

4. (i) $\dot{\mathbf{r}} = a(1 - \cos t)\mathbf{i}_1 + (a \sin t)\mathbf{i}_2 + b\mathbf{i}_3$;
$\ddot{\mathbf{r}} = (a \sin t)\mathbf{i}_1 + (a \cos t)\mathbf{i}_2$;
(ii) $\dot{\mathbf{r}} = (-a \sin t)\mathbf{i}_1 + (a \cos t)\mathbf{i}_2 - (2a \sin 2t)\mathbf{i}_3$;
$\ddot{\mathbf{r}} = (-a \cos t)\mathbf{i}_1 - (a \sin t)\mathbf{i}_2 - (4a \cos 2t)\mathbf{i}_3$.

5. $\dot{\mathbf{r}} = ak\mathbf{l}_1 + ak^2t\mathbf{l}_2$;
$\ddot{\mathbf{r}} = -ak^3t\mathbf{l}_1 + 2ak^2\mathbf{l}_2$.

6. (i) $\dot{\mathbf{r}} = -\dfrac{a(t^2-1)}{(t^2+1)^2}\mathbf{l}_1 + \dfrac{a(t^2-1)}{t(t^2+1)}\mathbf{l}_2$;

$$\ddot{\mathbf{r}} = a\left\{\frac{2t(t^2-3)}{(t^2+1)^3} - \frac{(t^2-1)^2}{t^3(t^2+1)}\right\}\mathbf{l}_1 + \frac{2a}{t^2}\left\{\frac{1}{(t^2+1)} - \frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)^2}\right\}\mathbf{l}_2.$$

(ii) $\dot{\mathbf{r}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{t}\right)^{3/2}\mathbf{l}_1 + \left(\frac{2}{t}\right)^{1/2}\mathbf{l}_2$;

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left\{\frac{3}{8}\left(\frac{2}{t}\right)^{5/2} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\mathbf{l}_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{t}\right)^{3/2}\mathbf{l}_2.$$

(iii) $\dot{\mathbf{r}} = e^{-t}\mathbf{l}_1 + (e^t - 1)\mathbf{l}_2$;
$\ddot{\mathbf{r}} = -(e^{2t} - e^t + e^{-t})\mathbf{l}_1 + (e^t + 1)\mathbf{l}_2$.

(iv) $\dot{\mathbf{r}} = (2 \sin 2t)\mathbf{l}_1 + 2(4 - \cos 2t)\mathbf{l}_2$;
$\ddot{\mathbf{r}} = -8(2 - \cos 2t)\mathbf{l}_1 + (8 \sin 2t)\mathbf{l}_2$.

7. (i) $\dot{\mathbf{r}} = -\dfrac{\sin\theta}{6}\mathbf{l}_1 + \dfrac{2 - \cos\theta}{6}\mathbf{l}_2$;

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{(2 - \cos\theta)^2}{108}\mathbf{l}_1.$$

(ii) $\dot{\mathbf{r}} = \left(\frac{2}{5}\sin\theta\right)\mathbf{l}_1 + \left(\frac{3 + 2\cos\theta}{5}\right)\mathbf{l}_2$;

$$\mathbf{r} = -\frac{3}{125}\left(3 + 2\cos\theta\right)^2\mathbf{l}_1.$$

8. (i) $\dot{\mathbf{r}} = 6t\mathbf{b}$; $\ddot{\mathbf{r}} = 6\mathbf{b}$;
(ii) $\dot{\mathbf{r}} = 4\mathbf{b}$; $\ddot{\mathbf{r}} = 0$;
(iii) $\dot{\mathbf{r}} = (\cos t)\mathbf{b}$; $\ddot{\mathbf{r}} = (-\sin t)\mathbf{b}$;
(iv) $\dot{\mathbf{r}} = \left(1 + \frac{1}{t}\right)\mathbf{b}$; $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{1}{t^2}\mathbf{b}$.

Ejemplos IVb pág. 93

1. Velocidad $= (5t + 16)\mathbf{i}_1 + (\frac{5}{2}t + 16)\mathbf{i}_2 + (3t + 28)\mathbf{i}_3$.
Vector de posición de la partícula en el instante t
$(\frac{5}{4}t^2 + 16t)\mathbf{i}_1 + (\frac{5}{4}t^2 + 16t)\mathbf{i}_2 + (\frac{3}{2}t^2 + 28t)\mathbf{i}_3$.

2. Velocidad $= (10 - 2\cos t)\mathbf{i}_1 + (12 - 64t)\mathbf{i}_2 + 24\mathbf{i}_3$.
Vector de posición de la partícula en el instante t
$(10t - 2\sin t)\mathbf{i}_1 + (12t - 32t^2)\mathbf{i}_2 + 24t\mathbf{i}_3$.

3. Velocidad $= (\frac{1}{2}t^2 + 16)\mathbf{i}_1 + (49 - \cos t)\mathbf{i}_2 + (72 - 32t)\mathbf{i}_3$.
Vector de posición de la partícula en el instante t
$(\frac{1}{6}t^3 + 16t)\mathbf{i}_1 + (49t - \sin t)\mathbf{i}_2 + (72t - 16t^2)\mathbf{i}_3$.

4. Velocidad $= 35\mathbf{i}_2 + (84 - 9{\cdot}8t)\mathbf{i}_3$.
Vector posición $= 35t\mathbf{i}_2 + (84t - 4{\cdot}9t^2)\,\mathbf{i}_3$
17 1/7 s, 600 m.

5. (i) 5 s.; (ii) $\dfrac{245\sqrt{3}}{2}$ m; (iii) 30·625 m.

6. 300,000 m.

10. $\mathbf{r} = \left(80 - \dfrac{2g}{3}\right)\mathbf{n} + \dfrac{80}{\sqrt{3}}\mathbf{a}$, donde n, a son vectores unitarios en el plano del movimiento, siendo n vertical y a horizontal.

Ejemplos V pág. 110

1. Elipse; excentricidad $\frac{1}{8}\sqrt{21}$.

2. Excentricidad $= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; período $= 2\pi a\sqrt{(a/\mu)}$.

3. Orbita $2/p^2 = 2 - \log r$.

11. Velocidad $= \left\{\left(n^2a^2 - u^2\right)\sin^2 nt + u^2\right\}^{\frac{1}{2}}$; período $= 2\pi/n$.

Ejemplos VI pág. 125

1. (i) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 + 5\mathbf{i}_3 - t(\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 - 2\mathbf{i}_3)$;
(ii) $\mathbf{r} = \mathbf{i}_1 + 5\mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3 - t(4\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 - 2\mathbf{i}_3)$;
(iii) $\mathbf{r} = 4\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 5\mathbf{i}_3 - t(5\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + 7\mathbf{i}_3)$;
(iv) $\mathbf{r} = -5\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3 + t(9\mathbf{i}_1 - 4\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3)$;
(v) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i}_1 + 5\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3 - t(9\mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 - 4\mathbf{i}_3)$.

2. (i) $\mathbf{r} = \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3 + t(2\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3)$;
(ii) $\mathbf{r} = -2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + 5\mathbf{i}_3 + t(2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 + 4\mathbf{i}_3)$;
(iii) $\mathbf{r} = -\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 + t(3\mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 + 6\mathbf{i}_3)$;
(iv) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i}_1 - 3\mathbf{i}_2 + 4\mathbf{i}_3 + t(\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 - 2\mathbf{i}_3)$;
(v) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i}_1 - 3\mathbf{i}_2 + 4\mathbf{i}_3 + t(5\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3)$;
(vi) $\mathbf{r} = -\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 + 4\mathbf{i}_3 + t(10\mathbf{i}_1 + 13\mathbf{i}_2 - 2\mathbf{i}_3)$.

3. (i) $\mathbf{r} = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 - \frac{3}{4}\mathbf{i}_3 + s(3\mathbf{i}_1 - 4\mathbf{i}_2 - \frac{5}{4}\mathbf{i}_3) + t(\mathbf{i}_1 - 4\mathbf{i}_2 - \frac{3}{4}\mathbf{i}_3)$;
(ii) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3 + s(-4\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) + t(5\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 - 5\mathbf{i}_3)$;
(iii) $\mathbf{r} = 3\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 - 4\mathbf{i}_3 + s(-\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 + 6\mathbf{i}_3) + t(-6\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + 5\mathbf{i}_3)$;
(iv) $\mathbf{r} = -2\mathbf{i}_1 - 3\mathbf{i}_2 + 5\mathbf{i}_3 + s(11\mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3) + t(9\mathbf{i}_1 - 3\mathbf{i}_3)$.

4. $\mathbf{r} \cdot (2\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) = 4$.
5. $\mathbf{r} \cdot (3\mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 + 6\mathbf{i}_3) = 28$.
6. $\mathbf{r} \cdot (-2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 + 4\mathbf{i}_3) = -8$.
7. $\mathbf{r} \cdot (3\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3) = 17$.
8. $(7/5)\mathbf{i}_2 + (23/5)\mathbf{i}_3$.
9. $-2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 + 7\mathbf{i}_3$.
10. (i) 12/7 unidades; (ii) $2\mathbf{i}_1 + \frac{4}{3}\mathbf{i}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{i}_3$.
11. $7/\sqrt{13}$.
12. (i) $4a/\sqrt{21}$; (ii) $10a/\sqrt{21}$.
13. $37/\sqrt{46}$.
17. $\overline{AX} = a\mathbf{i}_2$; $\overline{AY} = 2a\mathbf{i}_2 + a\mathbf{i}_3$; $\overline{AZ} = 2a\mathbf{i}_1 + a\mathbf{i}_2$; $\overline{AC} = 2a\mathbf{i}_1 + 2a\mathbf{i}_2$.
    Plano XYC : $\mathbf{r} = a\mathbf{i}_2 + s(a\mathbf{i}_2 + a\mathbf{i}_3) + t(2a\mathbf{i}_1 + a\mathbf{i}_2)$.
    Distancia: $2a/3$.
18. (iii) $(9, -8, -10)$.

Ejemplos VII pág. 137

1. $r = \dfrac{a}{\sqrt{3}}\,\theta\mathbf{i}_1 + (a \cos\theta)\mathbf{i}_2 + (a \sin\theta)\mathbf{i}_3$.
2. $(4, 2, 0)$; $\pi/2$.
3. $(\pm 4, 0, 0)$.
4. $\mathbf{r} = a\mathbf{i}_1$;
   $\mathbf{r} = a\mathbf{i}_1 + s\mathbf{i}_2 + s\mathbf{i}_3$.
5. $\mathbf{r} \cdot \{(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{i}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{i}_3\} = 0$.
7. $4\pi a$.
8. $-\dfrac{1}{2}\left(\log 2 - \dfrac{\pi}{4}\right), -\dfrac{1}{2}\left(\log 2 + \dfrac{\pi}{4}\right), \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$.
9. $\pi/4$; $\pi/3$; $\left(\dfrac{\pi}{2} - \cos^{-1}\dfrac{13}{10\sqrt{2}}\right)$.

INDICE ALFABETICO

Aceleración, 82.
– radial y transversal, 82, 85.

Centro de fuerza, 96.
– de gravedad, 39.
Circunferencia, 138.
Componentes de un vector, 30, 32.
Cosenos directores y razones de dirección, 35-38.

Diferencia de dos vectores, 22.
Diferenciación de vectores, 70.
Distancia desde un punto
– – – a un plano, 120, 122.
– – – a una recta, 128.
Distancia entre dos puntos, 40.

Ecuación de un plano, 116-119.
– de una línea recta, 39, 114.
Elipse, 136.
Energía, 19.
Escalar, 19.
–, producto, de dos vectores, 48.

Fuerza central, 96.

Hélice, 137.

Integración de un vector, 77.

Lanzamiento (de una partícula), 92.
Ley cuadrática inversa, 99, 104.
Leyes del movimiento de Newton, 88.

Momento
– angular, 88, 96.
– de una fuerza, 50, 60.
– lineal, 88.
Módulo de un vector, 20, 34.

Norma del giro hacia la derecha, 30-31.
Números complejos, 16.

Orbita
– elíptica, 101, 106.
– hiperbólica, 101.
– parabólica, 101.

Parábola, 136.
Plano de dos vectores, 20.
Producto
– de dos vectores
– – – escalar, 48.
– – – vectorial, 49.
– de tres vectores, 64.
– – – escalar, 64.
– – – vectorial, 67.
– de un vector por un número real, 23.
Producto escalar, 47, 48.
Producto vectorial, 49, 50.
Puntos alineados, 41, 121.
– coplanarios, 66.

Rectas concurrentes, 42.

Suma de los vectores, 21, 23, 24.
Superficie cilíndrica, 136.

Trabajo, 48, 60.

Vector
– área, 63, 98, 120.
– de posición, 20.
– libre, 20.
– lineal, 20.
base, 13.
definición, 10, 11, 19.
sistema de vectores unitarios, 13, 30, 31.
Vectores equipolentes, 21.
Velocidad, 82.
– radial y transversal, 82, 84, 85.
Volumen del paralelepípedo, 65.

Otros libros sobre MATEMATICAS

publicados por PARANINFO S.A.

BAJPAI, CALUS e HYSLOP.– Ecuaciones diferenciales. Texto programado.– 312 págs.– 16 x 22 cm.– Rústica.
BERGTOLD.– Matemáticas para radiotécnicos.– 438 págs.– 332 figuras.– 2 tablas de logaritmos.– 16 x 22 cm.– Rústica.
BERMAN y BEZARD.– Matemáticas para papá.– 310 págs.– 2ª edición.– 16 x 22 cm.– Rústica.
BERREBI.– Matemáticas. Ejercicios resueltos.– 3 tomos: T/I.– 306 págs.– T/II.– 404 págs.– T/III.– 316 págs.– 16 x 22 cm.– Rústica.
BOCHENSKI.– Compendio de lógica matemática.– 120 págs.– Colección "Lógica y Teoría de la Ciencia".– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.
BOOLE.– Investigación sobre las leyes del pensamiento.– Colección "Lógica y Teoría de la Ciencia".– 1981.– Prensa.
BRAY, CROXTON y MARTIN.– Análisis matricial de estructuras.– 160 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.
BREUER.– Iniciación a la teoría de los conjuntos.– 164 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.
CALUS y FAIRLEY.– Series de Fourier y ecuaciones en derivadas parciales. Texto programado.– 124 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.
CARRERO y MARFIL.– Matemáticas. 1er curso.– 360 págs.– 16 x 22 cm.– Rústica.
CUELLO.– Tablas de vencimientos bancarios y comerciales.– 400 págs.– 16 x 22 cm.– Linotex.
FAURE, KAUFMAN y DENIS-PAPIN.– Matemática moderna.– 362 págs.– 16 x 22 cm.– Rústica y linotex.
FLEYEL y DE LA PRADELLE.– Ejercicios sobre las funciones analíticas. Con soluciones.– 340 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.
FEYS y FITCH.– Los símbolos de la lógica matemática.– 192 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.– Colección "Lógica y Teoría de la Ciencia".
HAMILTON.– Lógica para matemáticos.– 244 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.– Colección "Lógica y Teoría de la Ciencia".
HOERNES y HEILWEIL.– Introducción al álgebra de Boole y a los dispositivos lógicos. Enseñanza programada.– 352 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.
HUNTER.– Metalógica. Introducción a la metateoría de la lógica clásica de primer orden.– Colección "Lógica y Teoría de la Ciencia".– 1981.– Prensa.
LABORDE.– Tablas numéricas de funciones elementales.– 152 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.
MARAVALL.– Cálculo de probabilidades y procesos estocásticos.– 484 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica y Linotex.
MILES.– Transformadas integrales en matemática aplicada.– 120 págs.– 16 x 22 cm.– Rústica.
MITCHEL.– Matemáticas medias para técnicos radioeléctricos.– 196 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.
MUELLER.– Las nuevas matemáticas en la Educación General Básica.– 160 págs.– 16 x 22 cm.– Rústica.
NIXON.– Transformación de Laplace.– 272 págs.– 86 figuras y gráficos.– 64 tablas.– 16 x 22 cm.– Rústica.
PARZEN.– Procesos estocásticos.– 374 págs.– 16 x 22 cm.– Rústica.
QUINET.–Curso elemental de matemáticas superiores.– 6 tomos. 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.– Tomo I: 240 págs.– 2ª edición.– Tomo II: 302 págs.– 3ª edición.– Tomo IV: 200 págs.– 2ª edición.– Tomo V: 296 págs.– 2ª edición.– Tomo VI: 300 págs.
QUINET y PERRADEAU.– Curso elemental de matemáticas superiores. Soluciones de los ejercicios de los tomos I, II y III.– 274 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– 1981.– Reimpresión.
RIOS.– Algebra lineal y geometría vectorial.– 3ª edición.– 392 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.
RIOS.– Cálculo infinitesimal.– 504 págs.– 122 ilustraciones.– 3ª edición.– 16 x 22 cm.– Rústica.
RIOS.– Matemática aplicada.– 476 págs.– 16 x 22 cm.– Rústica.
RIOS.– Matemáticas.– 392 págs.– 16 x 22 cm.– Rústica.
RIOS.– Matemáticas especiales.– 320 págs.– 2ª edición y 4ª tirada.– 115 figuras.– 16 x 22 cm.– Rústica.
RIOS.– Matemática finita.– 184 págs.– 83 figuras.– 3ª edición corregida y aumentada.– 16 x 22 cm.– Rústica.
SANTAMARIA y CARRERO.– Matemáticas. 2º curso.– 284 págs.– 16 x 22 cm.– Rústica.
SEVILLA.– Ecuaciones diferenciales. Tablas y otros datos matemáticos.– 352 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.
SIMONNARD.– Programación lineal.– 1981.– Reimpresión.
TROPPER.– Teoría de matrices aplicada a la electricidad y a la electrónica.– 120 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.

VEEN.– Introducción a la teoría de la investigación operativa.– 248 págs.– 16 x 22 cm.– Rústica.– Colección Biblioteca Técnica Philips.
WHITEHEAD y RUSSELL.– Principia mathematica.– Colección "Lógica y Teoría de la Ciencia".– 1981.– Prensa.
WILLIAMS.– Aritmética. Texto semiprogramado.– 284 págs.– 119 ilustraciones.– 16 x 22 cm.– Rústica.
ZISMAN.– Topología algebraíca elemental.– 308 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.

Obras de autores rusos publicadas por PARANINFO

ANTONOV y otros.– 1000 problemas de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría.– 452 págs.
BAKHVALOV.– Métodos númericos. Análisis. Algebra. Ecuaciones diferenciales ordinarias.– 737 págs.
DANKO y POPOV.– Ejercicios y problemas de matemáticas superiores.– 2 Tomos.– 1981.– Prensa.
DEMIDOVICH.– 5000 problemas de análisis matemático.– 2ª edición.– 600 págs.
DEMIDOVICH, BARANENKOV y otros.– Problemas y ejercicios de análisis matemático.– 530 págs.
DEMIDOVICH y MARON.– Cálculo numérico fundamental.– 748 págs.
DEMIDOVICH, MARON y SCHUVALOWA.– Métodos numéricos de análisis.– 600 págs.
FADEEVA.– Métodos de cálculo y álgebra lineal.– 224 págs.
GOLDSTEIN.– Programación lineal. Problemas y aplicaciones.– 576 págs.
LIJOLETOV y MATZKEVICH.– Problemas de matemática superior. Teoría de probabilidades y estadística matemática.– 496 págs.
MARON.– Problemas sobre cálculo de una variable. Elementos y teoría.– 496 págs.
OUMAEV.– Elementos de simulación en las calculadoras analógicas.– 1981.– Prensa.
SMIRNOV y DUNIN-BARKOWSKIJ.– Cálculo de probabilidades y estadística matemática.– 580 págs.
WENTZEL y OWTSCHAROW.– Problemas de cálculo de probabilidades. Con soluciones.– 456 págs.